MATEMATICA I

Corsi di Laurea in Ingegneria Elettrotecnica e in Ingegneria Energetica

Prova parziale del 4.11.2004 Tempo concesso: 90 minuti

Tema D - abbozzo di soluzioni

I numeri rimandano al libro di testo: Barozzi-Bergamaschi-Gonzalez: *Nuovo Calculus*, Progetto, 2002, oppure, se preceduti da "E", rimandano al libro di esercizi: Antoniazzi-Pavarin-Zannol: *Esercizi di Matematica A*, Progetto, 2003.

1. Si dica cosa significa $\lim_{x\to 3} f(x) = +\infty$ e si faccia un grafico di una funzione che goda di questa proprietà.
   Si dimostri quindi che la funzione $f(x) = x^2$ è continua nel punto $x = 2$.
   Sol. - vd. 2.8, a). Una funzione indicativa può essere $\frac{1}{|x-3|}$. Attenzione: se non si mette il modulo si ha invece una funzione che tende a $-\infty$ per $x \to 3$ da sinistra, e quindi non risponde al caso richiesto.
   Per la seconda questione, l'esercizio richiede di dimostrare, prima, che il limite di x^2 per $x \to 2$ è 4 (per la procedura vd. ad es. E, pag. 90, n. 3, che però è ben più impegnativo). Dopo è banale che è $f(2) = 4$.

2. Il limite della somma è sempre uguale alla somma dei limiti, quando questi esistono e sono finiti entrambi? E viceversa, se esiste il limite per $x \to x_0$ di una somma di due funzioni f_1 ed f_2, esistono i limiti dei singoli addendi per $x \to x_0$?
   Giustificare tutte le risposte.
   Sol. - Per la prima questione vd. teor. 2.7 a), p. 63 con dim. alla p. 64. Per il viceversa basta prendere una funzione f_1 che non ha limite (ad es. $\sin x$ per $x \to \infty$), prendere $f_2 = -f_1$, e sommarle: si ha la funzione sempre nulla che ovviamente ha limite.

3. Sia $f(x) = \frac{1}{Q(x)}$ dove $Q(x)$ è un polinomio di secondo grado. La f è continua su tutto $\mathbb{R}$? È continua sul suo insieme di defizione? Esiste un $\overline{x}$ tale che sulla semiretta $(\overline{x}, +\infty)$ la funzione risulti limitata?
   Giustificare tutte le risposte.
   Sol. - La f può non essere continua su tutta la retta, perché non è definita nei punti in cui il denominatore si annullasse. È invece continua sul suo insieme di definizione, perché è quoziente di funzioni continue con denominatore non nullo. Poiché $f(x) \to 0$ per $x \to \infty$, esiste un $\overline{x}$ tale che per $x > \overline{x}$ è $-\epsilon < f(x) < \epsilon$, e quindi su tale semiretta la $f(x)$ è limitata (lo è anche su una semiretta del tipo $(-\infty, \overline{x})$.

4. Si dia la definizione di funzione composta e si trovi un esempio in cui la composizione di due funzioni non è commutativa, cioè $f \circ g \neq g \circ f$.
   Sol. - vd. pagg. 42 e 43.

5. Si enunci il teor. di Weierstrass e si trovino degli esempi per i quali, se non è soddisfatta una delle ipotesi, non è soddisfatta neanche la tesi.
   Sol. - vd. Teorema 2.15, p. 71; i controesempi sono già p. 70.

6. La funzione $\frac{\tan x}{x} + \frac{1}{x}$ ha limite (finito) per $x \to 0$? Se sì, quanto vale? E ha limite (finito) per $x \to -\infty$? Se sì, quanto vale?
   Si giustifichino le risposte.
   Sol. - Per $x \to 0$ il primo addendo tende a 1 (ricordare che è $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$), mentre il secondo tende all'infinito; quindi il limite è ∞ (senza segno: è $+\infty$ da destra, è $-\infty$ da sinistra). Per $x \to -\infty$ la tangente va all'infinito in tutti i punti del tipo $x = -\pi/2 + k\pi$, e quindi la funzione non è neppure definita su tutta una semiretta che va a $-\infty$; ma anche limitandoci all'insieme in cui è definita, esistono infiniti punti in cui il primo termine vale 0 ed infiniti punti in cui $\forall M$ il primo termine vale più di M.

7. Si dica dove sono invertibili le funzioni $\log_a x$, con $0 < a < 1$, e $\arctan x$, e si faccia un abbozzo del grafico delle funzioni inverse.
   Sol. - La prima è invertibile su tutto il semiasse dei reali strettamente positivi, e la sua inversa è a^x; dato che $a < 1$ è decrescente da $+\infty$ a 0, il grafico passa per il punto $(0, 1)$. La seconda è invertibile su tutto l'asse reale, e la sua inversa è la tangente ristretta all'intervallo $]-\pi, \pi[$ (attenzione a non confondere questo intervallo, che è il dominio della inversa essendo il codominio dell'arcotangente, con l'insieme di invertibilità dell'arcotangente, che invece è, come abbiamo detto, tutta la retta).

8. Si dica dove è definita la funzione $\sqrt{\lg(16 - x^2)}$ e quale è la sua immagine.
   Si giustifichi la risposta.
   Sol. - La funzione è definita dove l'argomento del logaritmo è maggiore di 1, perché il radicando deve essere positivo; risulta $-\sqrt{15} \leq x \leq \sqrt{15}$ (attenzione: non basta richiedere che sia positivo l'argomento del logaritmo, che darebbe l'intervallo più ampio $]-4, 4[$). La funzione risulta quindi pari, il suo grafico è simmetrico rispetto all'asse y; è sempre positiva o nulla e ha minimo 0 per $x = \pm\sqrt{15}$. Il suo massimo è dove ha massimo l'argomento del logaritmo (sia il logaritmo che la radice sono funzioni crecenti, vd. es. 2.7, p. 43), che è ovviamente in $x = 0$. Il valore massimo è quindi $f(0) = 2\sqrt{\lg 2}$. L'immagine, dato che f è continua, è l'intero intervallo $[0, 2\sqrt{\lg 2}]$.

9. Si dica se la funzione $f(x) = x^2 e^{\sin x}$ ha limite per $x \to \infty$; si dica se è periodica, se è superiormente limitata, se è inferiormente limitata. Si giustifichino le risposte.
   Sol. - Non è periodica, e ha limite $+\infty$ (infatti il primo fattore tende

a $+\infty$ e il secondo fattore è limitato e i suoi valori sono staccati dallo zero); pertanto non è superiormente limitata. Lo è invece inferiormente, dato che è il prodotto di due funzioni di cui una si allulla solo nello 0 e l'altra non si annulla mai. Ha minimo, che è 0. Il grafico è ondulante, compreso tra la parabola $e^{-1}x^2$ (che viene toccata per tutti quegli x per cui è $\sin x = -1$, quindi $x = -\pi/2 + 2K\pi$) e la parabola ex^2 (che viene toccata per tutti quegli x per cui è $\sin x = 1$, quindi $x = \pi/2 + 2K\pi$).

10. Si enuncino due casi di indeterminazione del tipo $\frac{\infty}{\infty}$ per $x \to 2$ in cui esistono i limiti, ma diversi nei due casi, giustificando le risposte.
    Sol. - Basta prendere $f(x) = \frac{1}{x-2}$ e $f(x) = \frac{1}{(x-2)^2}$ e metterle una a numeratore e l'altra a denominatore, e poi scambiarle. La prima va all'infinito del primo ordine, l'altra del secondo. Facendo il rapporto e semplifcando una volta viene $x - 2$ che va a 0, e una volta viene $\frac{1}{x-2}$ che va a infinito.