MATEMATICA I

Corsi di Laurea in Ingegneria Elettrotecnica e in Ingegneria Energetica

Appello del 20.12.2004 Tempo concesso: due ore e mezza

**Tema A - Abbozzo di soluzioni**

1. Dire cosa significa
$$\lim_{x\to x_2} f(x) = -\infty$$
e dare un esempio concreto di funzione che gode di questa proprietà.
Sol. - Si voleva la definizione di limite in questo caso particolare, reperibile su tutti i libri. Molti hanno invece semplicemente scritto a parole che "per $x$ che tendeva a 2 il limite era $-\infty$". Una funzione come richiesta poteva essere $f(x) = -\frac{1}{|x-2|}$. Vari hanno fatto questo esempio, ma omettendo il modulo, per cui la funzione tendeva a $-\infty$ da destra, ma a $+\infty$ da sinistra. Alcuni hanno solo abbozzato un grafico.

2. Dati gli insiemi $A = \{1, 10\}$, $B = \{x \in \mathbb{R} : 0 < x < 10\}$, $C = A \cup B$, dire qual è l'estremo superiore di $A$, quello di $B$ e quello di $C$.
Dire poi se qualcuno dei tre insiemi ha massimo e, in caso positivo, quanto vale; quindi dire se qualcuno dei tre insieme ha minimo, e in caso, positivo, quanto vale.
Sol. - Gli estremi superiori di $A$, $B$, $C$ sono rispettivamente 10, 10 e 10, e sono massimi per $A$ e per $C$; $A$ ha minimo 1, gli altri due non hano minimo (hanno l'estremo inferiore, che è 0).

3. Data la funzione $f(x) = \lg|\lg|x||$, dire qual è il suo insieme di definizione.
Sol. - È la retta reale esclusi i punti 0, 1, -1, che annullano l'argomento o del logaritimo interno o di quello esterno. Vari hanno individuato soltanto lo 0, altri anche 1, quasi nessuno ha notato che se $x = -1$ il logaritmo interno è nullo.

4. Data la funzione $f(x) = 1 - x \arcsin x$, dire quale parabola la approssima meglio in un intorno di $x = 0$.
Sol. - La parabola è un polinomio di *secondo* grado. Lo sviluppo dell'arcoseno ha come primo termine $x$ (la sua derivata prima in $x = 0$ è 1), e quindi la parabola è $P(x) = 1 - x^2$. Vari hanno faticosamente trovato alcune derivate della funzione prodotto $x \arcsin x$, altri non le hanno calcolate in $x = 0$, altri ancora hanno tenuto anche termini superiori al secondo.

5. $f_1(x)$ è un infinitesimo del $2^o$ ordine per $x \to +\infty$ ed è $f_2(x) = x \sin x$, si può dire che esiste il limite di $f_1(x) \cdot f_2(x)$ per $x \to +\infty$? In caso affermativo si può dire quanto vale?
Giustificare le risposte.
Sol. - $f_1$ è del secondo ordine per $x \to +\infty$ e quindi la sua parte principale è del tipo $\frac{k}{x^2}$. $f_2$ è illimitata per $x \to +\infty$, ma *non* ha limite infinito (vale 0 infinite volte). Quindi *non* siamo nel caso di indeterminazione $0 \cdot \infty$. Tuttavia facendo il prodotto otteniamo:
$$\frac{k}{x^2} \cdot x \sin x = k \frac{\sin x}{x}$$
che tende a 0. Pertanto il prodotto è un infinitesimo del primo ordine.

6. Calcolare
$$\int_2^1 \frac{1}{x^2+2x+5}\,dx.$$
Sol. - Il denominatore si può scrivere $(x+1)^2+4 = \frac{1}{4}((\frac{x+1}{2})^2+1)$ e quindi una primitiva dell'integranda è l'arcotangente di $\frac{1}{2}\frac{x+1}{2}$. Va calcolata in 2, in 1 e quindi eseguita la sottrazione.

7. Studiare la funzione
$$f(x) = \arctan(1+\lg|x|)$$
(insieme di definizione, segno, continuità, derivabilità, crescenza, decrescenza, massimi, minimi, attacchi, eventuali asintoti verticali, obliqui o orizzontali, abbozzo del grafico).
Sol. - La funzione non è definita nello 0; è pari e quindi il suo grafico è simmetrico rispetto all'asse delle $y$; si può studiare anche solo per $x>0$; è per $x>0$ crescente perché composta di funzioni crescenti. Il codominio è $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, la retta $y=\frac{\pi}{2}$ è un asintoto orizzontale sia destro che sinistro. Il limite per $x\to 0$ è $-\frac{\pi}{2}$, e il limite della derivata è $+\infty$ per $x\to 0^+$, mentre è 0 per $x\to\infty$. La derivata vale per $x>0$
$$\frac{1}{1+(1+\lg|x|)^2}\frac{1}{x}$$
mentre per $x<0$ vale
$$\frac{1}{1+(1+\lg|x|)^2}\frac{-1}{x}.$$
Vari hanno sbagliato la derivata.

8. Calcolare l'area compresa tra l'asse $x$ e il grafico di $\arctan x$ per $0\le x\le 2$.
Sol. - Vale $\int_0^2 \arctan x\,dx$. L'integrale si fa per parti prendendo l'arcotangente come fattore finito e 1 come fattore differenziale.

9. Scrivere lo sviluppo di McLaurin (cioè di Taylor nel punto $x=0$) della funzione
$$f(x) = \sqrt{1+x^2}$$
Sol. - Lo sviluppo di $\sqrt{1+x}$ c'è sul libro, basta poi sostituire $x$ con $x^2$.

10. Il grafico di una funzione derivabile $f$ incontra l'asse delle $x$ in un punto $x_0$ ed è $f'(x_0)=\frac{\pi}{4}$. Si dica se $f$ è infinitesima per $x\to x_0$, e in caso positivo, di che ordine.
Giustificare le risposte.
Sol. - Se il grafico incontra l'asse delle $x$ evidentemente la funzione va a 0, quindi è un infinitesimo. Il grafico taglia l'asse, dato che $f'(x_0)\neq 0$; pertanto l'infinitesimo è del $1^o$ ordine.

11. Enunciare la regola di L'Hospital nel caso $\frac{0}{0}$.
Esporre un caso concreto in cui una forma indeterminata del tipo $1^\infty$ è stata ricondotta ad una forma del tipo $0\cdot\infty$ e quindi ad una del tipo $\frac{0}{0}$.
Sol. - L'enunciato c'è in qualsiasi testo. Quasi nessuno ha detto chiaramente che l'esistenza del limite del rapporto tra le derivate è un'ipotesi, mentre

l'esistenza del limite del rapporto tra le funzioni è una tesi. La forma indeterminata del tipo $1^\infty$ può essere

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$$

che si trasforma in $e^{\lim_{x\to\infty} x\lg(1+\frac{1}{x})}$, dove l'esponente è del tipo $\infty\cdot 0$. Quasi nessuno ha fatto un esempio adeguato; chi ha fatto un esempio è partito già da un caso in cui il limite si presentava sotto la forma $\frac{0}{0}$.

12. In un intorno sinistro di $x=0$ quale funzione ha valore maggiore,
$$f_1(x)=x^2 \text{ o } f_2(x)=\tan^2 x?$$
Giustificare la risposta.
Evidentemente la $f_2$; sono entrambe positive, ed è, sia in un intorno destro che in un intorno sinistro dello 0 $|\tan x| > |x|$, e quindi la disuguaglianza vale anche per i quadrati. Vari hanno fatto faticose considerazioni con lo sviluppo di Taylor di $\tan^2 x$; bastava ricordare che è $\tan x = x+\frac{x^3}{3}+o(x^3)$ e quadrare; si ha $x^2$ a cui va aggiunto $\frac{2}{3}x^4$ proveniente dal doppio prodotto; gli altri termini sono di ordine superiore.

13. Un integrale esteso ad una semiretta è un integrale generalizzato.
Si esponga un caso in cui tale integrale esiste finito e uno in cui tale integrale non esiste.
Sol. - Sulla retta $[1,+\infty)$ esiste finito l'integrale di $\frac{1}{x^2}$ mentre non è finito quello di $\frac{1}{x}$. Vari hanno fatto esempi su un intervallo limitato invece che su una semiretta.

14. Sia $f$ una funzione derivabile che cambia di segno nel punto $x_0$, e si sappia che anche la sua $f^+$ è derivabile in $x_0$. Cosa si può desumere su $f'(x_0)$? Giustificare la risposta.
Sol. - Se $f^+(x_0)$ è derivabile, significa che esiste finito il limite del rapporto incrementale sia da destra che da sinistra e sono uguali. Poiché la $f$ cambia segno, la $f^+$ vale 0 da una parte di $x_0$ (diciamo a destra), e quindi la sua derivata destra vale 0; poiché $f^+$ è derivabile vale 0 anche la derivata sinistra, cioè il limite del rapporto incrementale fatto dove la $f^+$ coincide con la $f$; allora anche la $f$ ha derivata nulla in $x_0$.

## Tema B - Abbozzo di soluzioni

1. Dire cosa significa
$$\lim_{x\to 4} f(x) = -6$$
e scrivere l'espressione di una funzione che gode di questa proprietà.
Sol. La definizione si trova in tutti i testi; una funzione come richiesta poteva essere una retta del tipo $y=m(x-4)-6$.

2. Si dica cosa significa la locuzione "primitiva di una funzione $f$" e si indichi una vasta classe di funzioni che ammettono primitive.
Date due primitive di una funzione $f$ definita su un intervallo $[a,b]$, in cosa differiscono tra loro? in base a quale considerazione?
Sol. - Si dice *primitiva* di una funzione $f$ in un intervallo $[a,b]$ una funzione (derivabile) $F$ tale che sia $F'(x)=f(x)\ \forall x\in[a,b]$. Una vasta classe di

funzioni che ammettono primitiva è quella delle funzioni continue su $[a, b]$ (teor. fondamentale o di Torricelli-Barrow). Due primitive differiscono tra loro per una costante, e ciò è una conseguenza del teor. di Lagrange. Molti hanno confuso la definizione di primitiva con il teorema citato.

3. Data la funzione $f(x) = 1 - \cos^2(2x)$, dire quale parabola la approssima meglio in un intorno di $x = 0$.
   Sol. - È $\cos(2x) = 1 - \frac{(2x)^2}{2!} + o(x^2)$ da cui, quadrando e tenendo fuori dall'infinitesimo di ordine superiore solo il termine derivante dal doppio prodotto di 1 e $\frac{(2x)^2}{2!}$, si ha $\cos^2(2x) = 1 - (2x)^2 + o(x^2)$. La parabola è quindi $P(x) = 4x^2$. Alcuni hanno scritto nella parabola anche termini di grado superiore al $2^o$; altri, pur trovando la parabola giusta, l'hanno disegnata con il vertice in $(0, 1)$ invece che in $(0, 0)$.

4. $f_1(x)$ è un infinitesimo del $2^o$ ordine per $x \to 0$ ed è $f_2(x) = x(\sin \frac{1}{x} + \frac{\pi}{2})$, si può dire che esiste il limite di $\frac{f_1(x)}{f_2(x)}$ per $x \to 0$? In caso affermativo si può dire quanto vale?
   Giustificare le risposte.
   Sol. - Vd. Tema A.

5. Dati gli insiemi $A = \{1, 12\}$, $B = \{x \in \mathbb{R} : 0 < x < 10\}$, $C = A \cup B$, dire qual è l'estremo superiore di $A$, quello di $B$ e quello di $C$.
   Dire poi se qualcuno dei tre insiemi ha massimo e, in caso positivo, quanto vale; quindi dire se qualcuno dei tre insieme ha minimo, e in caso, positivo, quanto vale.
   Sol. - $A$ ha massimo (e quindi estremo superiore) 12, e minimo 1; $B$ ha estremo superiore 10, ma non ha né massimo né minimo (ha inf $= 0$); $C$ ha massimo (e quindi estremo superiore) 12, e non ha minimo (ha inf $= 0$).

6. Data la funzione $f(x) = \lg|\lg|x-1||$, dire qual è il suo insieme di definizione.
   Sol. - È definita sulla retta reale tranne i punti 2, 1, 0.

7. Studiare la funzione
   $$f(x) = \sinh(\lg|x|)$$
   (insieme di definizione, segno, continuità, derivabilità, crescenza, decrescenza, massimi, minimi, attacchi, eventuali asintoti, abbozzo del grafico).
   Sol. - Non definita in $x = 0$; funzione pari, studiamola solo per i positivi, crescente da $-\infty$ a $+\infty$ per $x > 0$, vale 0 per $x = 1$; ha asintoto obliquo $y = \frac{x}{2}$ (infatti $e^{\lg x} = x$).

8. Calcolare l'area compresa tra l'asse $x$ e il grafico di $\lg x$ per $1 \leq x \leq 4$.
   Sol. - Vale $\int_1^4 \lg x \, dx$. L'integrale si fa per parti prendendo il logaritmo come fattore finito e 1 come fattore differenziale.

9. Scrivere lo sviluppo di McLaurin (cioè di Taylor nel punto $x = 0$) della funzione
   $$f(x) = \lg(1 + x^2)$$
   Sol. - È $\lg(1 + x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3)$, e basta sostituire $x^2$ ad $x$.

10. Il grafico di una funzione derivabile $f$ incontra l'asse delle $x$ in un punto $x_0$ ed è $f'(x_0) = \frac{\pi}{4}$. Si dica se $f$ è infinitesima per $x \to x_0$, e in caso positivo, di che ordine. Giustificare le risposte.
    Sol. - Vd. Tema A.

11. Enunciare la regola di L'Hospital nel caso $\frac{\infty}{\infty}$.
Esporre un caso concreto in cui una forma indeterminata del tipo $1^\infty$ è stata ricondotta ad una forma del tipo $0 \cdot \infty$ e quindi ad una del tipo $\frac{\infty}{\infty}$.
Sol. - Vd. Tema A.

12. In un intorno sinistro di $x = 0$ quale funzione ha valore maggiore,
$$f_1(x) = \sin x^2 \text{ o } f_2(x) = \sin^2 x?$$
Giustificare la risposta.
Sol. - Ricordando lo sviluppo del seno, quadrando e tenendo fuori dall'infinitesimo di ordine superiore solo il termine del doppio prodotto tra $x$ e $\frac{x^3}{3!}$ abbiamo
$$\sin^2 x = x^2 - \frac{x^4}{3} + o(x^4)$$
mentre è
$$\sin x^2 = x^2 - \frac{x^6}{3!} + o(x^3)$$
Pertanto in $\sin x^2$ viene tolto ad $x^2$ qualcosa di più piccolo (un infinitesimo di ordine maggiore), e quindi resta più grande di $\sin^2 x$, sia in un intorno sinistro che in un intorno destro.

13. In quali casi si ha un integrale generalizzato?
Si esponga un caso in cui tale integrale esiste finito e uno in cui tale integrale non esiste.
Sol. - Vd. Tema A.

14. Calcolare
$$\int_1^4 \frac{1}{x^2 + 2x - 3}\, dx.$$
Sol. - Vd. Tema A.