M151sett.tex

MATEMATICA 1
(per elettrotecnici ed energetici)

Prima settimana
Inizio: martedì 2005/9/27

Come si è cominciato a contare; i primi segni (I, II, III, IIII, V) su un osso di lupo trovato in una località che ora si trova nella Repubblica Ceca.

Supponiamo di conoscere i numeri naturali 1, 2, 3, ...; il loro insieme viene indicato con $\mathbb{N}$.

Assiomi sui numeri naturali (ci sono vari sistemi di assiomi che definiscono i numeri naturali; noi scegliamo quello di Giuseppe Peano):

1) 1 (poi sarà 0) è un numero naturale.
Questo assioma dà un nome ad un elemento.

2) per ogni numero naturale n esiste un *successore* (o *successivo*), detto $sg\ n$ (diverso da lui) e questo è unico.
Questo assioma dice che sull'insieme è istituito un *ordine*, e che l'insieme è costituito da una fila e non si divide in rami: dati due numeri naturali si può dire sempre quale viene prima e quale viene dopo.

3) 1 non è successore di nessun numero.
Questo assioma dice che c'è un primo elemento della fila.

4) numeri naturali diversi hanno successori diversi.
Questo assioma dice che non si tratta di più file che confluiscono e che la fila non ritorna su sé stessa. Infatti se fosse ad esempio $sg\ n = n$ i due numeri naturali n ed $sg\ n$ avrebbero lo stesso successore.

5) **Principio di induzione** Se $S \subset \mathbb{N}$ verifica:

$$\begin{array}{l} 1 \in S \\ n \in S \Longrightarrow \mathrm{sg}n \in S \end{array}$$

allora $S = \mathbb{N}$.

(N.B. - Alla seconda riga non deve essere verificato che $n \in S$, bensì l'implicazione.)

Questo assioma dice che la fila è unica e che tutti i naturali possono essere raggiunti con una operazione di passaggio al successivo.

Si dà una partenza, si dice che i numeri sono messi in fila, e che la fila è unica, e che non ricomincia un'altra fila, e che ogni elemento della fila è raggiungibile.

Definizione di *somma* e di *prodotto* in maniera induttiva:

$$\begin{aligned}
&n+1=\mathrm{sg}\ n\\
&n+\mathrm{sg}\ m=\mathrm{sg}\ (n+m)\\
&n\cdot 1=n\\
&n\cdot \mathrm{sg}\ m=n\cdot m+n
\end{aligned}$$

ATTENZIONE: Si tratta di definizioni dei simboli "più" e "per", non sono teoremi, con queste definizioni non si scopre niente. Semplicemente si utilizza il concetto di "successore" per definire il concetto di "addendo". L'ultima relazione scritta sarebbe quella che siamo abituati a scrivere

$$n\cdot(m+1)=n\cdot m+n.$$

Valgono tutte le proprietà solite: commutativa, associativa della somma e del prodotto, quella distributiva della somma rispetto al prodotto. Vale anche la proprietà cancellativa della somma; vale anche quella del prodotto, in quanto in questa formulazione non abbiamo lo zero. Se ci fosse lo zero, quel caso va trattato a parte.

Partendo da questi assiomi abbiamo le relazioni d'ordine, col $<$, $=$, $>$, $\leq$, $\geq$ e la solita proprietà maggiorativa della somma; abbiamo la solita proprietà di *tricotomia*, che però funziona solo con le relazioni d'ordine totale $>$, $=$, $<$ e *non* con il segno $\leq$ di minore o uguale. Infatti è sia $3<4$ che $3\leq 4$. Abbiamo la solita proprietà transitiva dell'ordinamento:

$$a<b,\ b<c\Longrightarrow a<c.$$

0.0.1 ESERCIZIO. È vera $5\leq 7$? È vera $5<7$? □

C'è poi il collegamento tra l'ordinamento e le operazioni:

$$a<b\Longrightarrow\begin{cases}a+c<b+c\\ a\cdot c<b\cdot c \text{ ricordiamo che } c\in\mathbb{N}\end{cases}$$

Principio di induzione: Sia $\mathcal{A}(n)$ un'affermazione che dipende da $n\in\mathbb{N}$. Se

- $\mathcal{A}(1)$ è vera;
- dalla validità di $\mathcal{A}(n)$ si può desumere la validità di $\mathcal{A}(n+1)$;

allora $\mathcal{A}(n)$ è vera per tutti gli $n\in\mathbb{N}$.

ATTENZIONE: questo non è un teorema, è un'altra formulazione del principio di induzione, solo che non è applicato direttamente ai numeri naturali, bensí a proposizioni che sono numerate tramite i numeri naturali.

0.0.2 ESERCIZIO. Dimostriamo che $10^n \geq 10 \cdot n \; \forall n \in \mathbb{N}$. È vero per $n = 1$; lo supponiamo vero per n e lo dimostriamo per $n + 1$.
Devo quindi dimostrare che è $10^{n+1} \geq 10(n + 1)$.
Infatti è

$$10^{(n+1)} = 10^n \cdot 10 > 10^n \cdot 2 = 10^n + 10^n \geq \text{(per ipotesi di induzione)} = 10n + 10n \geq 10n + 10 = 10(n + 1)$$

Concludiamo che l'asserto è vero *per ogni* n (qui entra il principio di induzione). □

0.0.3 ESERCIZIO. Esempio del big domino rally e dei soldatini. □

0.0.4 ESERCIZIO. Le due ipotesi che compaiono nel principio di induzione vanno verificate entrambe. Vediamo cosa succede se ne verifico una sola. Prendiamo i numeri interi positivi costituiti da 2 e da tutti i numeri che si ottengono da 2 aggiungendo via via 2; chiamiamo questi numeri a_n. Ora consideriamo il numero 1 e tutti i numeri che si ottengono da 1 aggiungendo via via 2; chiamiamo questi numeri b_n. Chiamiamo *pari* i numeri interi positivi divisibili per 2, cioè tali dividendoli per 2 si ha un quoziente q e resto 0, e diciamo q_n il quoziente che si ottiene dividendo il numero a_n di posto n per 2, e chiamiamo p_n il quoziente che si ottiene dividendo il numero b_n per 2. Notiamo che sia la classe degli a_n sia la classe dei b_n soddisfa al secondo asserto del principio di induzione: infatti, se suppongo che a_n sia pari, risulta $a_n = 2q_n + 0$; pertanto
$a_{n+1} = a_n + 2 = 2q_n + 2 = 2q_{n+1}$
Se suppongo che b_n sia pari risulta ancora $b_{n+1} = b_n + 2 = p_n + 2 = 2p_{n+1}$. Quindi per entrambi queste classi di numeri è verificato che, supposta vera la proprietà di essere pari per l'elemento n-simo, risulta pari l'elemento $(n+1)$-simo; ma a_1 è pari, quindi soddisfa anche la prima delle due proprietà, mentre b_1 no. □

0.0.5 DEFINIZIONE. Un numero p si dice *primo* se è divisibile solo per sé stesso e per 1.
(e quindi *non* si può scrivere come prodotto $p = ab$ con $a, \; b \neq p$) □

0.0.6 TEOREMA. *(***di Euclide***) Un numero naturale si può sempre scomporre in fattori primi. Tale scomposizione è unica.*
(niente dim.)

Notiamo che la parola *teorema* viene dal greco, in cui significava *spettacolo, visione*; la parola *ipotesi* significava *ciò che è posto sotto, base* mentre *tesi* significava *ciò che si asserisce, ciò che si pone.*

Dal teor. di Euclide segue se un numero primo p è un fattore di un prodotto $a \cdot b$ allora è un fattore di almeno uno tra a e b.

(*niente dim.*)

0.0.7 TEOREMA. *Esistono infiniti numeri primi.*

Questo teorema si trova già negli *Elementi* di Euclide, con dimostrazione per assurdo. (La dimostrazione per assurdo, spesso usata nella matematica greca, consiste nel negare la tesi del teorema e riconoscere che tale negazione conduce ad una contraddizione o con l'ipotesi stessa del teorema, o con principi precedentemente stabiliti.)

N.B. - Finora non è stata scoperta una regola che dia tutti i numeri primi, per cui l'insieme dei numeri primi non è conosciuto a priori. Si conoscono famiglie di numeri (ovviamente dispari) che sono di sicuro primi, ma non si conoscono tutti i numeri primi. L'insieme dei numeri primi è dato quindi per comprensione, non per estensione.

I numeri reali

Non ci soffermiamo sui numeri reali, le cui proprietà riteniamo note; le operazioni di somma e prodotto, così come quelle di sottrazione e divisione (ricordiamo che non è definita la divisione per 0).
Riteniamo pure note le relazioni di associatività e di distributività delle operazioni. Una struttura su cui siano definite due operazioni che ammettano una unità ed un inverso per ogni elemento si dice *corpo*. Pertanto l'insieme dei reali con le sue due operazioni di somma e prodotto è un corpo numerico.
Ricordiamo che dati due reali x e y sussiste tra loro una ed una sola tra le seguenti relazioni:

$$\begin{aligned}&x < y\\ &x = y \text{ (proprietà di tricotomia)}\\ &x > y\end{aligned}$$

Ricordiamo che sussiste la proprietà transitiva della disuguaglianza, e la *proprietà archimedea*:

$$\forall\, x, y \in \mathbb{R}, x > 0 \quad \exists\, n \in \mathbb{N} : nx > y.$$

Invece non è vero che esiste una e una sola tra le seguenti:

$$x \leq y, \quad x = y, \quad x \geq y :$$

infatti è $4 = 4$ e anche $4 \leq 4$, e quindi anche $4 \geq 4$.

Un'altra proprietà è quella di densità: dati due numeri reali distinti, ne esiste sempre uno strettamente compreso tra di essi (**proprietà di densità**).

Occupiamoci di una proprietà specifica dei numeri reali, che non hanno tutti gli insiemi numerici, in particolare non ce l'ha $\mathbb{N}$ (**principio di incastro**):

se abbiamo numeri reali a_n e b_n tali che sia

$$a_n \le a_{n+1}, \qquad b_n \ge b_{n+1}, \qquad a_n \le b_m \ \forall n, m \in \mathbb{R}$$

allora esiste almeno un punto x di $\mathbb{R}$ tale che sia

$$a_n \le x \le b_n \, \forall n \in \mathbb{N}$$

Questo principio si dice anche **principio di completezza** di $\mathbb{R}$.
L'insieme dei reali è un *corpo ordinato archimedeo completo.*

Si dànno per noti il concetto di *valore assoluto* (o *modulo*) $|x|$ di un numero reale x e le sue proprietà. Ricordiamo in particolare che un valore assoluto di qualsiasi numero reale è strettamente positivo, salvo quello di 0 che è nullo; ricordiamo che è $|x| = |-x|$ e che $|x| \le aLongleftrightarrow - a \le x \le a$, e che se è $|x| = a$ significa che x può essere $+a$ come $-a$.
Ricordiamo la disuguaglianza triangolare

$$|x + y| \le |x| + |y|$$

e altre due proprietà importanti:

$$|xy| = |x||y|; \quad |\,|x| - |y|\,| \le |x - y|$$

0.0.8 Esercizio. Se

$$0 \le a \le \epsilon \quad \forall \epsilon > 0$$

allora $a = 0$.

Infatti se fosse $a > 0$ prendiamo $\epsilon = \frac{a}{2}$; ma siccome è, con $a > 0$, $\frac{a}{2} < a$, avremmo $a > \epsilon$ contro l'ipotesi. □

Attenzione: esistono insiemi, pur ordinati, per i quali non vale la proprietà dell'esercizio precedente.

Sono dati per noti gli **interi relativi**, così come i **razionali**, che sono i quozienti degli interi relativi quando il denominatore sia diverso da 0. Notiamo che gli interi $\mathbb{Z}$ non godono né della completezza né della densità, e che i razionali $\mathbb{Q}$ non godono della completezza, pur godendo della densità.
Si dà per noto che questi insieme si denotano con $\mathbb{Z}$ e $\mathbb{Q}$

Dimostriamo che non esiste un numero razionale $\frac{a}{b}$ tale che il suo quadrato sia 2.

Infatti se fosse $\frac{a^2}{b^2} = 2$ avremmo $a^2 = 2b^2$; supponiamo di aver semplificato i fattori comuni, e avremmo che a^2 sarebbe pari, e quindi anche a sarebbe pari; ma allora a^2 sarebbe divisibile per 4, e allora anche b^2 sarebbe pari; ma allora sarebbe pari anche b, il che è contro l'ipotesi che il quoziente a/b fosse ridotto ai minimi termini.

Non dimostriamo che c'è un numero reale il cui quadrato vale 2 (si dimostrerebbe con il principio di incastro).

Con ragionamento analogo si può dimostrare che ogni numero reale positivo n ha almeno una **radice n-sima** nell'insieme dei numeri reali, cioè dato un numero reale $\lambda \geq 0$ ed un numero naturale n allora $\exists\ !\ \xi$ tale che $\xi^n = \lambda$. (*niente dim.*)
Tale numero si indica con $\xi = \sqrt[n]{\lambda}$ oppure con $\xi = \lambda^{\frac{1}{n}}$.

Vengono date per note le proprietà dei radicali, e la notazione

$$x^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{x^m} = (\sqrt[n]{x})^m$$

Del pari vengono date per note le proprietà delle potenze (esercizi 1.5 e 1.6) e la formula risolutiva delle equazioni di secondo grado (esercizio 1.7).

Vengono date per note le proprietà dei numeri reali, la loro rappresentazione decimale, i numeri decimali periodici, la funzione generatrice di un numero decimale periodico, numeri positivi e negativi, ecc.

Da notare che i numeri decimali finiti si possono tutti scrivere come numeri decimali infiniti di periodo 9: 1= 0,9999 $\ldots$.

Si indica con $(x)_p$ il numero decimale finito ottenuto dall'allineamento decimale che esprime x troncato al decimale p-esimo.

Nomenclatura sugli intervalli *aperti, chiusi, semiaperti (a destra, a sinistra), semirette a destra, a sinistra, chiuse, aperte, di origine a, ecc.*.

Un punto di un intervallo si dice *interno* se non coincide con nessun estremo.

Principio di incastro per gli intervalli

0.0.9 TEOREMA. *Se I_k, $k = 1, 2, 3, \ldots$ è una successione di intervalli chiusi incastonati (cioè contenenti ciascuno il successivo: $I_k \supset I_{k+1}\ \forall k \in \mathbb{N}$), allora esiste almeno un numero reale x tale che $x \in I_k\ \forall k = 1, 2, \ldots$, cioè $\cap\{I_k :\ k \in \mathbb{N}\} \neq \emptyset$.*

È semplicemente la formulazione per gli intervalli di quello che abbiamo visto per i numeri reali.

Notiamo che se non sono chiusi non è vero: Sia $I_k = \{x : 0 < x < \frac{1}{k}\}$: la loro intersezione è vuota. Inoltre in $\mathbb{Q}$ non è vero, anche quando gli intervalli fossero chiusi.

Definizione di un *maggiorante* m di un insieme A di numeri reali:

$$m \geq a\, \forall a \in A$$

Massimo: a^*se è maggiore di tutti e appartiene ad A.

Di maggioranti possono essercene molti; di massimi, se ce ne sono, ce n'è uno solo.

Analogamente per il minimo. $\frac{1}{n}$ ha massimo 1 ma non ha minimo.

Insieme *superiormente limitato, inferiormente limitato.*

Insieme *limitato*: se è limitato l'insieme dei moduli:

$$|a| \leq m \forall\, a \in A$$

0.0.10 ESERCIZIO. Trovare il massimo, minimo, i maggioranti e minoranti dell'insieme costituito dai punto 0 e 1, dell'intervallo pieno, di due intervalli chiusi, semichiusi, aperti. □

0.0.11 TEOREMA. *Sia $A \subset \mathbb{R}$ un insieme superiormente limitato e non vuoto. Allora l'insieme M di tutti i maggioranti ha un elemento minimo s, cioè $\exists s \in M$ tale che*

$$s \leq m \quad \forall m \in M$$

Ciò significa che $\exists\ s \in \mathbb{R}$ tale che

$$\begin{array}{ll} s1) & s \geq a\ \forall a \in A \\ s2) & \text{se } m \geq a \quad \forall a \in A \text{ allora } m \geq s. \end{array}$$

0.0.12 DEFINIZIONE. Il minimo dei maggioranti di un insieme A di numeri reali si dice **estremo superiore** di A e si indica con

$$s = \ \sup A$$

. □

Nella dimostrazione dell'esistenza (che saltiamo) si vede che l'estremo superiore sup A di un insieme A gode delle seguenti due proprietà:

$$\begin{array}{l} a \leq \ \sup A \quad \forall a \in A \\ \text{se } a \leq m \quad \forall a \in A \quad \text{ allora } \sup A \leq m. \end{array}$$

Da notare che se fosse verificata una disuguaglianza più forte, come

$$\text{se } a \leq m \quad \forall a \in A$$

non per questo risulterebbe anche la disugugaglianza stretta sup$A < m$; la disuguaglianza resterebbe sempre con il segno di *leq*.

Quando un insieme A non è superiormente limitato si converrà di dire che sup $A = +\infty$.

Analogamente si dà la definizione di **minorante** di un insieme A di numeri reali; sarà dimostrabile l'esistenza del massimo dei minoranti, e questo si dirà inf A.

0.0.13 Esercizio. Determinare estremo superiore ed inferiore dell'insieme $\{n - \frac{1}{n}\}: \quad n \in \mathbb{N}$. □

0.0.14 Esercizio. Se è $\sup A = \inf A$, come è fatto A? □

0.0.15 Esercizio. Due insiemi di numeri reali hanno lo stesso inf e lo stesso sup; sono uguali? □

0.0.16 Esercizio. Due intervalli sulla retta hanno lo stesso inf e lo stesso sup; sono uguali? □

0.0.17 Esercizio. L'insieme dei punti $\{n\} \cup \{\frac{1}{n}\}$ è limitato? Ha estremo inferiore, superiore, massimo minimo? □

0.0.18 Esercizio. L'insieme dei punti $\{n - \frac{1}{n}\}$ è limitato? Ha estremo inferiore, superiore, massimo minimo? □

0.0.19 Esercizio. Calcoliamo la somma $\sum_{k=1}^{n} k$.
Risulta $(k+1)^2 = k^2 + 2k + 1$. Se scriviamo questa uguaglianza per tutti i singoli k da 1 fino ad n e poi sommiamo membro a membro abbiamo:

$$\sum_{k=1}^{n}(k+1)^2 = \sum_{k=1}^{n} k^2 + 2\sum_{k=1}^{n} k + n = 1 + \sum_{k=2}^{n} k^2 + 2\sum_{k=1}^{n} k + n$$

Adesso facciamo slittare gli indici: risulta

$$\sum_{k=1}^{n}(k+1)^2 = \sum_{k=2}^{n+1} k^2 = (\text{isolando l'ultimo termine}) = \sum_{k=2}^{n} k^2 + (n+1)^2$$

Se prendiamo i due primi membri delle due ultime formule essi sono uguali; uguagliando i secondi membri, notiamo che hanno entrambi la sommatoria dei k^2, ma uno ha un termine in più che vale 1. La sommatoria quindi viene eliminata da entrambe le parti e resta

$$(n+1)^2 = 1 + 2\sum_{k=1}^{n} k + n$$

da cui si deduce

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{1}{2}[(n+1)^2 - n - 1] = \frac{1}{2}(n^2 + 2n + 1 - n - 1) = \frac{n(n+1)}{2}$$

e quindi

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$$

cosa che peraltro era riconoscibile subito: si sommano il primo e l'ultimo addendo e se ne fa la media, e questa la si moltiplica per n che è il numero degli addendi. □

0.0.20 Esercizio. Questa volta proviamo a fare la somma non dei numeri bensí delle potenze dello stesso numero: $\sum_1^n x^k$.
Moltiplico tutto per $1-x$ ed ottengo:

$$(1-x)\sum_1^n x^k = \sum_1^n x^k - x\sum_1^n x^k = \tag{0.0.1}$$
$$(x+x^2+x^3+\cdots+x^n)-(x^2+x^3+x^4+\cdots+x^{n+1}) = x-x^{n+1}$$

da cui:

$$\sum_1^n x^k = \begin{cases} \frac{x-x^{n+1}}{1-x} \text{ se } x \neq 1 \\ n \text{ se } x = 1 \end{cases}$$

□

0.0.21 Esercizio. Proviamo a calcolare la formula appena trovata utilizzando invece il principio di induzione.
Dobbiamo verificare che per $n = 1$ essa è vera. Infatti la sommatoria a sinistra si compone di un termine solo, che vale x, e l'espressione a destra vale

$$\frac{x-x^2}{1-x}$$

che si semplifica e resta x, c.v.d.
Adesso dimostriamo che, supponendo la formula vera per n, essa risulta valida per $n+1$. Infatti è:

$$\sum_{k=1}^{n+1} x^k = \sum_{k=1}^{n} x^k + x^{n+1}$$

Ma per l'ipotesi di induzione la prima sommatoria ci è nota, e quindi risulta:

$$\sum_{k=1}^{n+1} x^k = \frac{x-x^{n+1}}{1-x} + x^{n+1} = \frac{x-x^{n+2}}{1-x}$$

□

0.0.22 Esercizio. Dato un insieme A si indica con $\mathcal{P}(A)$ l'insieme costituito da tutti i suoi sottoinsiemi. Detto di passaggio, notiamo che l'insieme vuoto $\emptyset$ non ha elementi, ma l'insieme dei suoi sottoinsiemi è costituito da un insieme che ha un elemento che è l'insieme vuoto, e che quindi si indica così: $\{\emptyset\}$.[1] Sia adesso A un insieme costituito da n elementi, con n generico, che possiamo indicare così:

$$A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$$

[1] Non si confondano $\emptyset$ e $\{\emptyset\}$!

Vogliamo verificare che il numero di elementi che compone $\mathcal{P}(A)$ è 2^n. Dimostriamolo per induzione. Dobbiamo verificare il *punto base* e poi il *passo induttivo.* Il punto base lo abbiamo già verificato: se A è l'insieme vuoto, cioè con 0 elementi, $\mathcal{P}(A)$ ha $1 = 2^0$ elementi.
Verifichiamo adesso il *passo induttivo.* Dobbiamo verificare che, supponendo vero che quando A ha n elementi $\mathcal{P}(A)$ ha 2^n elementi, allora quando A ha $n+1$ elementi $\mathcal{P}(A)$ ha 2^{n+1} elementi.
Infatti scomponiamo A in un insieme A_1 che ha n elementi e lo uniamo ad un insieme A_2 composto di un elemento solo, e possiamo scrivere così:

$$A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\} \cup \{a_{n+1}\}\}$$

L'insieme delle parti di A è costituito dalle parti di A_1 (compresa la sua parte vuota) a cui si aggiungono le parti che si ottengono da queste aggiungendo a ciascuna di queste a_{n+1}. Le prime sono, per ipotesi del passo induttivo, in numero di 2^n e le seconde sono ancora in numero di 2^n; pertanto è:

$$\mathcal{P}(A) = 2^n + 2^n = 2 \cdot 2^n = 2^{n+1}$$

risulta quindi che è $\mathcal{P}(A) = 2^n$ per tutti gli $n \in \mathbb{N}$, c.v.d. $\square$

Si ricorda la definizione di *fattoriale*:

$$0! = 1,\ 1! = 1,\ \dots n! = n(n-1)!$$

Si noti che la definizione è data per induzione: si è così definito il fattoriale di qualsiasi numero naturale.

Si ricorda la formula del **binomio di Newton**:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!} a^k b^{n-k}$$

La frazione $\frac{n!}{k!(n-k)!}$ viene anche scritta con il simbolo

$$\binom{n}{k}$$

****

Non fanno parte del programma d'esame: dim. del teor. 1.2; dalla dim. della prop. 1.3 alla fine del par. 1.2; dim. della prop. 1.5; dalla sestultima riga di p. 10 fino a prima del "Nota Bene" di p. 11; dim. del teor. 1.6; par. 1.4 fino alla fine di p. 18; dim. del teor. 1.9; i casi *b), c)* e *d)* dell'es. 1.15all'es. 1.16 b) di p. 24 fino a metà di pag. 29; da metà di pag. 30 alla fine di p. 31; dim. della prop. 1.12; la risoluzione dell'es. 1.21; es. 1.22; es. 1.23.