

M152sett.tex

MATEMATICA 1

**2a settimana**

Inizio 3.10.2005

Definizione di funzione, nomenclatura: dominio, codominio, immagine, intersezione con le parallele agli assi; funzione (strettamente) crescente, decrescente (monotonia).

Grafici delle funzioni elementari: esponenziali, logaritmi in basi diverse, potenze

Grafico del logaritmo e dell'esponenziale  $a^x$  con  $a > 1$ .

Grafico dell'esponenziale  $a^x$  con  $0 < a < 1$ .

Composizione di funzioni.

Funzione composta

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$\cos x^2$ ;  $\lg \sqrt{|x|}$

Si scrive  $g \circ f(x)$ .

Attenzione alla non commutatività  $f \circ g \neq g \circ f$ :

$$\cos x^2 \neq \cos^2 x; \quad \lg(x-1) \neq \lg x - 1$$

Funzione inversa. Componendo  $f$  con  $f^{-1}$  si ha l'identità.

Notazione  $f^{-1}$ ; risulta  $f^{-1} \circ f^{-1} = f$ . Grafico di una funzione inversa come simmetrico rispetto alla bisettrice del I e III quadrante (senza dim.).

(il 4.10.2005 era il “martedì no)

5.10.2005

Equazione della retta:

$$\begin{aligned} y &= kx \\ y &= kx + b \\ y &= \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}(x - x_1) + f(x_1) \end{aligned}$$

Significato dei coefficienti.

Equazione della parabola:

$$\begin{aligned} y &= x^2 \\ y &= ax^2 \\ y &= ax^2 + b \end{aligned}$$

Parte intera, mantissa.

Funzione convessa: che sta sotto alla retta secante;  
risulta

$$f(ax_1 + bx_2) \leq a f(x_1) + b f(x_2)$$

Funzione concava: se  $-f$  è convessa.

La composta di due funzioni crescenti è crescente, di due funzioni decrescenti è crescente, di due funzioni una crescente e una decrescente è decrescente.

Una funzione crescente è invertibile. Non è detto il viceversa.  
Arcoseno, arcocoseno, arcotangente e loro grafici.

Successione come  $f : \mathbb{N} \rightarrow A$

In particolare le successioni di numeri reali quando è  $A = \mathbb{R}$ .

Definizione di limite di una successione, finito o infinito.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n = +\infty$$

Mostrare alcune successioni che tendono a 0, a un limite finito, che non tendono a niente, che tendono ad un limite infinito.

$$\frac{n+1}{n} \rightarrow 1$$

Il limite lo devo indovinare per poter verificare se gode della proprietà.

Se una successione è crescente e limitata allora ha limite finito, e questo limite coincide con l'estremo superiore (con dim.)

Comportamento di

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

(senza dim.) Si indovina che è crescente (conto fatto solo sui primi termini) e che è limitata da 3. Pertanto ha limite, che è minore di 3, che viene indicato con  $e$ .

Sottosuccessioni convergenti di una successione che non converge:

$$(-1)^n; \quad (-1)^n \frac{n+1}{n}$$

Proprietà del limite: se esiste è unico.

Teorema della permanenza del segno.

**0.0.1 ESERCIZIO.** Se una successione è fatta di numeri positivi ed ha limite, il limite è positivo?

**R.** No; vd. ad esempio la successione  $\{\frac{1}{n}\} \rightarrow 0$ . L'unica cosa che posso dire è che il limite è positivo o *nullo*. Non può invece essere negativo, perché questo andrebbe contro il teorema della permanenza del segno.  $\square$

Il limite di una somma è uguale alla somma dei limiti.

Proprietà fondamentali del limite (senza dim.).

**0.0.2 ESERCIZIO.** (2.11 del testo) Una successione che tende a 0 moltiplicata per una limitata (di cui non si sa neppure se ha un limite) è una nuova successione che tende a zero. (importantissimo!)  $\square$

**N. B.** - Sono importantissimi gli esercizi da 2.12 a 2.17, nonché il comportamento di  $\sum_{k=1}^n x^k$  al variare di  $n \in \mathbb{N}$  con  $x \in \mathbb{R}$  fissato.

Principio di confronto (o dei carabinieri)

Comportamento di  $\sum_{k=1}^n x^k$  al variare di  $n \in \mathbb{N}$  ( $x \in \mathbb{R}$  fissato).

Abbiamo già visto che quella sommatoria vale  $n$  quando  $x = 1$ .

Abbiamo visto che per  $x \neq 1$  la sommatoria vale

$$\sum_{k=1}^n x^k = \frac{x - x^{n+1}}{1 - x}$$

Vediamo come si comporta tale quantità al crescere di  $n$ , cioè vogliamo calcolare

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n x^k$$

Si vede subito che per  $|x| < 1$  la quantità  $\frac{x^{n+1}}{1-x}$  tende a 0, e quindi resta  $\frac{x}{1-x}$ . Si vede subito che per  $x = -1$  non c'è limite, perché per gli  $n$  pari risulta 0 e per gli  $n$  dispari risulta -1.

Per  $x > 1$  il denominatore è negativo, il numeratore anche perché è  $x^{n+1} > x$ . Inoltre  $x^{n+1} \rightarrow +\infty$ , e quindi l'intera frazione tende a  $+\infty$ .

Se è  $x < -1$  per gli  $n$  pari il limite risulta  $+\infty$ , mentre per gli  $n$  dispari risulta  $-\infty$ , e quindi il limite complessivo non c'è.

Solitamente si usa la notazione  $\sum_{k=1}^{+\infty} x^k$  per indicare  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n x^k$ .

Abbiamo quindi fatto un limite di una sommatoria quando l'indice dell'ultimo addendo tende all'infinito; tale operazione di limite si dice **serie**.

Definizione di  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = l$  come generalizzazione del concetto di limite per le successioni.

**0.0.3 ESEMPIO.** Funzioni che tendono a zero: esponenziale  $a^x$  con  $a < 1$ ,  $\frac{1}{x}$ ,  $\frac{1}{x}$ ,  $\frac{1}{\sqrt{x}}$ .  $\square$

Se una funzione ha un limite  $l$  per  $x \rightarrow \infty$  allora quello è il limite su tutte le successioni di punti che vanno all'infinito.

Può tuttavia esistere una particolare successione di punti sulla quale la funzione ha un limite, mentre non ce l'ha in generale. Ad esempio: il seno che

su una succ. di punti vale 0, su un'altra vale 1, e quindi non può aver limite per  $x \rightarrow \infty$ .

Esempio interessante:

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{x^n}{n!} = 0$$

Calcoliamo il limite del modulo, che è lo stesso.

Poniamo  $a_n = \left| \frac{x^n}{n!} \right|$ , e si ha, per  $x \neq 0$

$$0 \leq \frac{a_{n+1}a_n}{= \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}} \left| \frac{x^n}{n!} \right| = \frac{|x|}{n+1}$$

e quindi il limite dell'ultimo membro è 0. Ciò significa che  $\exists n_0$  tale che  $\forall n > n_0$

$$0 \leq \frac{a_{n+1}}{a_n} < \frac{1}{2}$$

e quindi si ha che il termine generico è maggiorato dal prodotto di  $a_{n_0}$  per  $(1/2)^k$  e quindi questo prodotto tende a 0. (vd. pag. 59)

\*\*\*\*\*

*Non fanno parte del programma d'esame:* dim. dell'esempio di pag. 40; es. 2.3; es. 2.5; dim. del teor. 2.3; la verifica di p. 48; la dim. di p. 49; la dim. delle proprietà del limite (pp. 51-52); esempi 2), 3), 8), 10), 14) alle pp. 55-57.