M153sett.tex

MATEMATICA 1

**3a settimana**

Inizio 10.10.2005

Proprietà del limite: se esiste è unico.

**N. B.** - Sono importantissimi gli esercizi da 2.12 a 2.17, nonché il comportamento di $\sum_{k=1}^n\ x^k$ al variare di $n \in \mathbb{N}$ con $x \in \mathbb{R}$ fissato.

Principio di confronto (o dei carabinieri)

**0.0.1** Esempio. Vogliamo calcolare $\sum_{k=1}^n\ x^k$ al variare di $x$.
Ricordiamo che è $\sum_{k=1}^n\ x^k = x + x^2 + \cdots + x^n$.
Se $x = 1$ abbiamo che la somma vale $n$.
Se $x \neq 1$ abbiamo

$$\sum_{k=1}^n\ x^k = \frac{x - x^{n+1}}{1-x}$$

Calcoliamo ora cosa viene quando facciamo tendere $n$ all'infinito, e quindi scriveremo

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^n\ x^k = \lim_{n\to+\infty} \frac{x - x^{n+1}}{1-x}$$

Se $|x| < 1$ si ha

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{x - x^{n+1}}{1-x} = \frac{x}{1-x}$$

e quindi

$$\sum_{k=1}^n\ x^k = \frac{x}{1-x}$$

Se $x = -1$ abbiamo che la successione è indeterminata (viene 0 se $n$ è pari, e invece -1 se $n$ è dispari).
Se $x > 1$ la successione è divergente: va a $+\infty$.
Se $x < -1$ la successione va a $-\infty$ sugli $n$ dispari e a $+\infty$ sugli $n$ pari.
Pertanto, posto

$$\sum_{k=1}^\infty\ x^k = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^n\ x^k$$

abbiamo

$$\sum_{k=1}^\infty\ x^k = \begin{cases} \frac{x}{1-x} & \text{per } |x| < 1 \\ +\infty & \text{per } x > 1 \\ \text{non è definita per } x \leq -1. \end{cases}$$

□

Solitamente si usa la notazione $\sum_{k=1}^{+\infty} x^k$ per indicare $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} x^k$.

Abbiamo quindi fatto un limite di una sommatoria quando l'indice dell'ultimo addendo tende all'infinito; tale operazione di limite si dice **serie**.

Più generalmente, data una succ. $a_1,\ a_2,\ \dots a_n \dots$, si dice **serie** una operazione che consta di due passi:
1) trasformazione della successione $\{a_n\}$ in una successione $\{s_n\}$ di somme parziali:

$$s_1 = a_1,\ s_2 = a_1 + 1_2,\ s_3 = a_1 + 1_2 + a_3,\ \dots s_n = \sum_{k=1}^{n} a_n$$

2) esplorazione del limite della successione $\{s_n\}$.
Se il limite esiste ed è finito, la serie di dice *convergente*, se esiste ed è infinito si dice *divergente*, se non esiste si dice *indeterminata*.

Definizione di $\lim_{x\to\infty} f(x) = l$ come generalizzazione del concetto di limite per le successioni.

**0.0.2** Esempio. Funzioni che tendono a zero: esponenziale $a^x$ con $a < 1$ , $\frac{1}{x}$, $\frac{1}{x}$, $\frac{1}{\sqrt{x}}$. □

Se una funzione ha un limite $l$ per $x \to \infty$ allora quello è il limite su tutte le successioni di punti che vanno all'infinito.
Può tuttavia esistere una particolare successione di punti sulla quale la funzione ha un limite, mentre non ce l'ha in generale. Ad esempio: il seno che su una succ. di punti vale 0, su un'altra vale 1, e quindi non può aver limite per $x \to \infty$.

Esempio interessante (ancora sulle successioni):

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad \lim_{n\to+\infty} \frac{x^n}{n!} = 0$$

Calcoliamo il limite del modulo, che è lo stesso.
Poniamo $a_n = |\frac{x^n}{n!}|$, e si ha, per $x \neq 0$

$$0 \leq \frac{a_{n+1}}{a_n} = |\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}| : |\frac{x^n}{n!}| = \frac{|x|}{n+1}$$

e quindi il limite dell'ultimo membro è 0. Ciò significa che $\exists n_0$ tale che $\forall n > n_0$

$$0 \leq \frac{a_{n+1}}{a_n} < \frac{1}{2}$$

e quindi si ha che il termine generico è maggiorato dal prodotto di $a_{n_0}$ per $(1/2)^k$ e quindi questo prodotto tende a 0. (vd. pag. 59)

Definizione di limite sia finito che infinito per $x \to \infty$ e per $x \to -\infty$. Verifiche con funzioni elementari: $a^x$ con $a < 1$ e con $a > 1$. Verifica con $f(x) = \frac{1}{x}^2$. Calcolo esplicito, fissato l'epsilon trovare il delta corrispondente.

Definizione di limite finito e infinito per $x \to x_0$, con interpretazione grafica.

**0.0.3** TEOREMA. *(della permanenza del segno) Se una funzione ha per limite $L \neq 0$ per $x \to x_0$, allora in un intorno di $x_0$ la funzione ha lo stesso egno di $L$.*

**0.0.4** TEOREMA. *( della limitatezza locale) Se* $\lim_{x\to x_0} f(x) = l$ *allora* $\exists M > 0$, $r > 0$ *tali che*

$$0 < |x - x_0| < r \Longrightarrow |f(x)| \leq M$$

**0.0.5** TEOREMA. *Una funzione $f$ ha limite $L$ per $x \to x_0$ se e solo se su ogni successione di punti $x_n$ che tendono a $x_0$ con $x_n \neq x_0$ risulta* $\lim_{n\to+\infty} f(x_n) = L$.
*(senza dim.)*

Proprietà fondamentali del limite, quando i limiti sono finiti: di una somma, di un prodotto, di un quoziente (se il limite del denominatore è $neq0$).

Attenzione: se una funzione è sempre minore di un'altra, i limiti possono essere uguali (caso **d** del teor. 2.7): caso $x$ e $2x$ per $x \to 0$.

Teorema del confronto anche per le funzioni.

Una infinitesima per una limitata è infinitesima (2.22)
$x \sin \frac{1}{x}$ per $x \to 0$
$\frac{1}{x} \sin x$ per $x \to \infty$

Esempi per cui esiste il limite della somma e non esistono i singoli limiti.

Limiti destro e sinistro.
Esempio: $e^{\frac{1}{x}}$ per $x \to 0$

Esistenza dei limiti laterali per una funzione monotona.

Esempio di limite di una funzione composta utilizzando il grafico dell'arcotangente:

$$\lim_{x\to\infty} \arctan \lg |x| = \frac{\pi}{2}$$

$$\lim_{x\to 0} \arctan \lg |x| = -\frac{\pi}{2}$$

Il grafico è simmetrico rispetto all'asse $y$, incrocia l'asse $x$ nei punti -1 e 1. Non c'è né massimo né minimo, data la crescenza sull semiretta dei positivi e la decrescenza sulla semiretta dei negativi.

Limite della somma uguale alla somma dei limiti. Resta escluso il caso $= \infty \ - \ \infty$.

Limite del prodotto, se sono finiti $l_1$ ed $l_2$, uguale al prodotto dei limiti. Resta escluso il caso $0 \cdot \infty$. Facili controesempi con $f(x) = x$ e $g(x) = 1/x$, oppure $g(x) = 1/x^2$

Limite del quoziente uguale al quoziente dei limiti se il denominatore ha limite diverso da 0.

Se $f(x) < g(x)$, allora $\lim_{x \to x_0} f(x) \leq \lim_{x \to x_0} g(x)$; attenzione, non si può mettere il minore stretto.

Se $\lim_{x \to x_0} f(x) = 0$ allora $\lim_{x \to x_0} \frac{1}{f(x)} = \infty$ e sul segno dipende, se tendeva a zero restando positivo il limite sarà $+\infty$, se restava negativo il limite sarà $-\infty$.

Una funzione limitata moltiplicata per una che ha limite 0 è una funzione che ha limite 0.

Limite notevole:
$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$: *non lo si dimostra*

$\lim_{x \to \infty} \frac{\sin x}{x} = 0$: perchè?

$\lg \sqrt{|x|}$

Rapporto tra due polinomi, rapidità con cui tendono all'infinito, segno degli infiniti.

Inverse del seno e del coseno: dove sono invertibili le funzioni trigonometriche?
Grafico delle funzioni inverse delle funzioni trigonometriche.

$x \ e^{\sin x}$
Qual è il suo limite per $x \to \infty$? Siamo sicuri che ce l'ha? E per $x \to 0$?
È periodica? NO; tutte le volte in cui il seno vale 0 il grafico tocca la retta $y = x$; tutte le volte in cui il seno vale 1 il grafico si poggia (da sotto) sulla retta $r(x) = e \cdot x$, tutte le volte in cui il seno vale -1 si poggia sulla retta $f(x) = \frac{1}{e} \cdot x$.

Il prodotto di una funzione che va all'infinito per una funzione che si tiene <u>distante dallo 0</u> va all'infinito.

Una funzione crescente di una funzione crescente è crescente, una funzione crescente di una funzione decrescente è decescente.
Pertanto una funzione crescente di una funzione periodica è periodica.
Studio di $f(x) = e^{\sin x}$.

Studio di $\lg \sqrt{|x|}$

Studio del grafico, ottenuto solo con il limite, di

$$f(x) = \frac{1}{(x-2)(x-3)}$$

Ordine di infinito: si prende come infinito di confronto $x$ per $x \to \infty$

Definizione di infinitesimo: funzione che tende a 0 (per $x \to \infty$ o per $x \to x_0$.
*Infinitesimo di confronto*: $x$ per $x \to 0$ e $\frac{1}{x}$ per $x \to \infty$.

*Ordine di infinitesimo*: $f(x)$ infinitesima si dice un infinitesimo di ordine $k$ se diviso per $x^k$ dà per risultato un numero finito e $\leq 0$.

Frazioni con al denominatore polinomi di 2o grado che andavano a zero per $x \to \infty$ del 2o ordine.

Verifiche sull'ordine di infinitesimo del seno, dell'arcoseno, della tangente dell'arcotangente.

Ordine di infinito di alcune funzioni elementari. Il logaritmo è quello che corre meno nella sua corsa all'infinito o allo zero.
Ricordarsi che quando il grafico taglia l'asse $x$ senza essere a sua volta tangenti all'asse y, l'infinitesimo è del 1o ordine.
*******************************************
*Non fanno parte del programma d'esame:* esempi 2), 3), 8), 10), 14) alle pp. 55-57; gli esempi 2), 3) a p. 55; esempio 14) a p. 57; es. 2.19; risoluzione dell'esercizio 2.21; dim. di 2.6; dim. di 2.7; dim. del teor. 2.9.