M154sett.tex

4a settimana

Inizio 17.10.2005

lezioni del 19.10.2005 e 20.10.2005 non effettuate per motivi di salute; verranno recuperate alla fine del corso

Tipo 0/0 con il quoziente di due funzioni che valgono zero nello stesso punto x_0.
Ordine di infinito e di infinitesimo per $x \to x_0$: $\frac{\sin^2 x}{x}$, $\frac{\sin x}{x^2}$, $\frac{x^2}{\operatorname{tg} x}$ per $x \to 0$.

Definizione di funzione continua.

Esempi di funzioni continue su tutto il loro insieme di definizione: costanti, polinomi, funzioni trigonometriche.
Somme, prodotti e quozienti (purché il denominatore non si annulli) di funzioni continue sono continue.
Funzioni composte di funzioni continue sono continue.

Prolungamento per continuità: è impossibile per $e^{1/x}$, perché per $x \to 0$ non c'è limite finito (è $+\infty$ da destra e 0 da sinistra), mentre invece lo è per $\frac{\sin x}{x}$, che ha limite $= 1$ (e quindi basta porre $f(0) = 1$ per rendere continua la nuova funzione così prolungata), per $\arctan(\lg \sqrt{|x|})$ che ha limite $-\pi/2$ (e quindi basta porre $f(0) = -\pi/2$ per rendere continua la nuova funzione così prolungata).

Definizione di massimo e minimo per una funzione; definizione di funzione limitata, di sup, di inf di una funzione.

<u>Teor. della permanenza del segno</u> - Se una funzione continua in un punto x_0 ha un valore $f(x_0) \neq 0$, allora in un intorno di x_0 ha valori tutti dello stesso segno di $f(x_0)$. (2.11)

<u>Teorema di Weierstrass</u> - Funzioni continue su un intervallo chiuso e limitato di $\mathbb{R}$ (basterebbe su un insieme: su un intervallo è un caso particolare) hanno massimo e minimo e quindi sono limitate.

Controesempi in cui, se cade una ipotesi cade anche la tesi:

e^x su tutta la retta non ha né max né min: infatti $\mathbb{R}$ non è un intervallo limitato.

$\operatorname{tg} x$ sull'intervallo (necessariamente aperto) $]-\pi/2, \pi/2[$ non ha né max né min (infatti siamo su in intervallo limitato, ma non chiuso).

Invece pur cadendo un'ipotesi la tesi può non cadere: il seno anche guardato su tutta la retta ha massimo 1 e minimo -1.

<u>Teorema di tutti i valori compresi</u> - Una funzione continua su un intervallo (a, b), se assume in due punti x_1 e x_2 due valori diversi $f(x_1) \neq f(x_2)$,

allora assume tutti i valori compresi tra $f(x_1)$ ed $f(x_2)$.
In particolare se una funzione assume in un intervallo valori positivi e negativi di sicuro c'è un punto in cui si annulla. (niente dim.)

Grafici di funzioni continue su intervalli, e verifica della tesi.

Grafici di funzione continue su una coppia di intervalli, e verifica col disegno che la tesi può non valere.

****

Non fanno parte del programma d'esame: dim. del teor. 2.11; dim. del teor. 2.13; dim. del teor. 2.15.