M155sett.tex

**5a settimana**
Inizio 24.10.2005

Condizione di Lipschitz su un intervallo $A$:
esiste una costante $L$ tale che

$$\forall x_1, x_2 \in A \quad |f(x_2) - f(x_1)| \leq L|x_1 - x_2|.$$

Una funzione che soddisfa la condizione di Lipschitz si dice *lipschitziana*.
Notare la differenza con un funzione continua in tutti i punti dell'intervallo.

Somme, prodotti e funzioni composte di funzioni lipschitziane sono funzioni lipschitziane.
(*niente dim.*)

Se una funzione è lipschitziana è anche continua; non è vero il viceversa (ad es. $f(x) = \sqrt{|x|}$.)

**0.0.1** Esercizio. Se un polinomio è di grado dispari, ha almeno una radice reale.
Infatti è una funzione continua: inoltre, dato che tende a $+\infty$ e a $-\infty$ per $x \to \infty$ ha valori positivi e negativi, e quindi assume tutti i valori compresi tra questi due, e quindi anche lo 0. $\square$

**0.0.2** Definizione. Una funzione definita su un intervallo $[a, b]$ si dice *differenziabile* in un punto $x_0 \in [a, b]$ se esiste una retta $T(x)$ passante per il punto $(x_0, f(x_0)$ tale che

$$\lim_{x \to x_0} \frac{T(x) - f(x)}{(x - x_0)} = 0. \tag{0.0.1}$$

$\square$

Una retta del genere, siccome passa per il punto, sará del tipo

$$T(x) = f(x_0) + m(x - x_0)$$

con un certo $m$ opportuno.
La condizione significa che il numeratore della frazione è un infinitesimo di ordine superiore al primo.

Andiamo a sostituire nella formula (0.0.1) il valore di $T(x)$ ed otteniamo:

$$0 = \lim_{x \to x_0} \frac{T(x) - f(x)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x_0) + m(x - x_0) - f(x)}{x - x_0} = m - \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

da cui

$$m = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

oppure, posto $x - x_0 = h$,

$$m = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

Attenzione: la prima formula parla di una funzione di $x$ definita in $(a, b)$ e, quello che ci interessa, un intorno di $x_0$, la seconda parla di una funzione di $h$ definita in $(a - x_0, b - x_0)$ (il primo estremo è negativo!) e, quello che ci interessa, un intorno di 0.

**0.0.3** DEFINIZIONE. Il numero $m$ definito come sopra si dice *derivata di f(x) nel punto* $x_0$, e si indica con $f'(x_0)$ oppure $\frac{df}{dx}(x_0)$. □

**0.0.4** DEFINIZIONE. La retta $T(x) = f(x_0) + m(x - x_0)$ si dice *retta tangente* al grafico di $f(x)$ nel punto $x_0$. □

Ovviamente, se esite la retta tangente, la funzione è differenziabile, e viceversa.

**0.0.5** DEFINIZIONE. Se una funzione ha derivata in un punto si dice *derivabile* in quel punto. □

Notiamo che se una funzione è derivabile in un punto è anche continua in quel punto.

Notiamo che non è vero il viceversa; non basta neppure essere lipschitziana in un punto per essere derivabile. (vd. $f(x) = |x|$)

Notiamo che se sostituiamo ad $f(x)$ la sua retta tangente, l'errore che si commette tende a 0 di ordine superiore al primo.

Calcoliamo la derivata di $f(x) = x^2$ (vd. esempio a p. 78).

La derivata di una costante è chiaramente 0 in ogni punto.
Le funzioni che differiscono tra loro per una costante hanno la stessa derivata.

La derivata di un polinomio di primo grado è costante (ed è il coefficiente del termine in $x$).

Somme, prodotti e funzioni composte di funzioni derivabili sono derivabili. La derivata della somma è la somma delle derivate. Per la derivata del prodotto e della funzione composta vedremo in seguito. La derivata di una funzione moltiplicata per una costante è la costante moltiplicata per la derivata della funzione.

**0.0.6** TEOREMA. *Se una funzione è derivabile nei suoi punti di massimo e minimo (anche non isolati), la sua derivata in quei punti è 0.*

DIMOSTRAZIONE. Infatti il rapporto incrementale è positivo o nullo da una parte e negativo o nullo dall'altra. Pertanto dovendo avere limite, questo limite è 0. □

**0.0.7** TEOREMA. *(di Rolle) Se una funzione definita e continua in un intervallo chiuso* $[a, b]$ *vale 0 agli estremi ed è derivabile all'interno,* $\exists$ *almeno un punto dell'intervallo in cui la derivata è nulla.*

DIMOSTRAZIONE. Infatti la funzione o è costante, e allora ha derivata nulla in ogni punto, o non lo è; se non lo è, siccome è continua su un intervallo chiuso e limitato, deve avere un massimo o un minimo all'interno, e in tale punto la derivata è nulla. □

**0.0.8** TEOREMA. *(di Lagrange o del valore medio). Sia* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *continua: se inoltre è derivabile in* $]a, b[$*, allora* $\exists \xi$ :

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(\xi).$$

DIMOSTRAZIONE. Infatti la differenza tra la funzione e la retta secante è una funzione continua che vale 0 agli estremi, ed è derivabile nei punti interni; per il teor. di Rolle deve avere un punto in cui la derivata si annulla. Quindi deve esserci un punto in cui le due derivate sono uguali. □

Prendiamo $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ e dimostriamo che ha massimo.

Prendiamo un polinomio di secondo grado e dimostriamo che la sua derivata ha una radice (reale).

**0.0.9** TEOREMA. *Una funzione continua in un intervallo e che ha derivata nulla in ogni punto interno dell'intervallo è costante.*

**0.0.10** TEOREMA. *Due funzioni definite e continue su un intervallo e derivabili all'interno, se hanno ovunque la stessa derivata differiscono tra loro per una costante.*

Massimi e minimi globali o locali.

Regole di derivazione: derivata di un prodotto, di un quoziente, di una funzione composta.

Studio e derivazione di alcune funzioni (in particolare, studio della crescenza senza l'uso della derivata).

Studio di

$$f(x) = e^{\frac{x^2-1}{x}}$$

Si studia prima l'esponente (funzione ausiliaria), che è definito per $x \neq 0$, tende a 0 per $x \to \infty$, tende a $-\infty$ per $x \to 0^+$ e a $+\infty$ per $x \to 0^-$; tale funzione ausiliaria è crescente su ciascuna delle semirette degli $x > 0$ e gli $x < 0$ (NON è crescente su tutto il suo insieme di definizione). Poi la funzione $f$ è a sua volta crescente su ciascuna delle dette semirette, tende a 1 per $x \to \infty$, in particolare a 1 da sopra per $x \to -\infty$ e da sotto per $x \to +\infty$; tende a $+\infty$ per $x \to 0^-$ e tende a 0 per $x \to 0^+$. Per vedere come tende a 0 da destra vale la pena di fare la derivata, che tende a 0, quindi nell'attacco la tangente è l'asse delle $x$ (NON quello delle $y$ come erroneamente detto; il procedimento per vedere che tende a 0 non è ancora stato studiato, è un tipo di forma indeterminata $0 \cdot \infty$).

Studio di modi di tendere all'infinito riguardanti la convessità o concavità.

Derivata della funzione inversa; il teor. 3.5 richiede che la derivata della funzione diretta sia diversa da 0! (bisogna studiarsi a memoria le derivate dell'arcoseno, dell'arcocoseno, del logaritmo e dell'arcotangente).

Studio, sulle due semirette di positivi e negativi, di

$$f(x) = \arctan x + \arctan \frac{1}{x}$$

vale due costanti diverse sulle due semirette (risp. $\pi/2$ e $-\pi/2$). NON è verificata la tesi che se la derivata è sempre 0 la funzione è costante, perché non siamo su un intervallo.

Derivate successive, e loro relazione con la concavità o convessità (teor. 3.6).
Punto di flesso: la derivata seconda è nulla (non è detto il viceversa).

Studio delle funzioni

$$f(x) = x\sqrt{1-x^2}; \qquad f(x) = x^3 e^{-x}; \qquad g(x) = \frac{x}{\ln x}$$

Quiz vari su pezzetti di grafici di funzioni e su test a risposta multipla (concavità, crescenza, indovinare se c'è un massimo o un minimo).

*****************

*Non fanno parte del programma d'esame*: dall'esempio di p. 73 alla p. 75; es. 3.6; es. 3.7; i par. 3.1.1 e 3.1.2, salvo le formule (3.11), la prima delle (3.1.15); par. 3.1.3 salvo il teor. 3.5; es. 3.14; dim. del teor. 3.6; es. 3.15.