M158sett.tex

8a settimana
Inizio 14.11.2005

Integrazione per sostituzione:

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\ dx = \lg|f(x)| + c$$

(infatti basta derivare il secondo membro)

$$\int \sin x \cos x\ dx = \frac{\sin^2 x}{2} + c$$

$$\int \sin^n x \cos x\ dx = \frac{\sin^{n+1} x}{n+1} + c$$

$$\int \operatorname{tg} x\ dx = \lg|\cos x| + c$$

$$\int x \lg x\ dx = \lg x \frac{x^2}{2} - \int \frac{x^2}{2}\frac{1}{x}\ dx = \ldots$$

$$\int x \arctan x\ dx = \ldots$$

(integrazione per parti prendendo x come fattore differenziale, poi nell'integrale si aggiunge e toglie 1...)

$$\int (\lg x)^n\ dx = (\text{per iterazione}) \ldots$$

$$\int x^n \lg x\ dx = \ \text{(si prende come fattore finito il logaritmo)} = \ldots$$

$$\int e^{kx}\ dx = \frac{1}{k}e^{kx}$$

$$\int x^n e^{kx} = \ldots$$

(si prende come fattore finito x^n e se ne abbatte l'esponente una unità alla volta integrando per parti)

$$\int P(x)e^{kx} = \ldots$$

$$\int \sin x e^{kx}\ dx = \ldots$$

in quest'ultima bisogna integrare per parti due volte e poi raccogliere; però attenzione: bisogna prendere come fattore finito sempre o l'esponenziale o la funzione trigonometrica. Se si cambia, si arriva a 0=0.
Vd. esempi ed esercizi dalla metà di p. 165 fino all'enunciato del teor. 7.1 a p. 176, e i casi a) e b) della parte centrale di p. 179.

Esercizi sulle maggiorazioni del seno e del coseno confrontando chi è più grande o più piccolo tra il $\sin x$ e x, poi tra $\cos x$ e $1-\frac{x^2}{2}$, poi tra $\sin x$ e $x-\frac{x^3}{3!}$ poi tra $\cos x$ e $1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}$
Si nota così l'ordine di infinitesimo del seno, della differenza $\sin x - x$ che è del terzo ordine, di $\cos x - 1$ che è del 2^o e così via. (Vd. p. 128-131, "Approssimazione di $\sin x$ e $\cos x$ mediante polinomi", fino all'es. 4.11 escluso.)
Esercizio sul notare che e^x è sempre maggiore di 1, di $1+x$, di $1+x+\frac{x^2}{2!}$, di $1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}$. (Vd. "Ordini di grandezza" dalle ultime righe di p. 143 all'es. 5.3; non occore sapere la dimostrazione degli esercizi, bensì l'enunciato.)

Disegno dei polinomi che approssimano e^x in un intorno di $x=1$.

Teor. di Cauchy o degli incrementi finiti: su un intervallo con le funzioni f e g continue agli estremi e derivabili all'interno, esiste un punto ξ tale che

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$$

Dimostrazione appositamente sbagliata per mostrare che non si tratta di una banale conseguenza del teor. di Lagrange.

Regola di L'Hospital sia nel caso $\frac{0}{0}$ che nel caso $\frac{\infty}{\infty}$, sia nel caso di $x\to\infty$ sia nel caso di $x\to x_0$.

L'ipotesi non è necessaria per la tesi:

$$\frac{x+\sin x}{x+\cos x}$$

tende chiaramente a 1, ma non c'è il limite del rapporto tra le derivate.
Importanti i "Nota Bene" di p. 188, gli esempi e gli esercizi 8.1. e 8.2 di p. 189.

Studio della funzione

$$f(x)=\frac{x}{1+x^2}$$

e vedere che l'integrale generalizzato non c'è.
La funzione è dispari, va a 0 per $x\to\infty$, la derivata è

$$\frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}$$

che si annulla in $x = \pm 1$ e in 0 vale 1.
Una primitiva è $\frac{1}{2}\lg(1+x^2)$ che va all'infinito come $\lg x$, e quindi non c'è integrale finito.
Notare che l'integrale sulla semiretta c'è se all'infinito la funzioe va a zero del 2^o ordine, mentre non c'è se va a 0 del 1^o.

Integrali generalizzati vicino allo 0.

$$\int_0^1 \lg x \; dx$$

Non si può fare perché la funzione non è limitata; però si può fare

$$\lim_{a\to 0^+}\int_a^1 \lg x \; dx = \lim_{a\to 0}(x\lg x|_a^1 - \int_a^1 1 \; dx)$$

Il primo pezzo viene zero (c'è uno $0\cdot -\infty$, ma viene 0 perché il logaritmo va all'infinito poco rispetto ad x che va a 0 del primo ordine) e il secondo pezzo che è l'integrale va a -1.

Notare che $\frac{1}{x^k}$ ha integrale finito su qualsiasi semiretta $[a, +\infty[$ con $k > 1$ e invece non è finito se $k < 1$.

Studiare $y = x\lg x$
Siamo nel caso $0\cdot\infty$. Va a zero per $x \to 0^+$ convalori negativi, a tangente verticale (è $f'(x) = \lg x + 1$), non ha asintoto obliquo (la derivata prima non ha limite finito), la derivata si annulla in $x = e^{-1}$, dove la funzione ha un minimo.

Studiare $y = x^x$
Si scrive $y = e^{x\lg x}$, e quindi ha minimo dove $x\lg x$: il grafico è simile, solo spostato all'insù di 1.

Studiare $f(x) = x^k \lg x, \quad k > 0$
$f'(x) = x^{k-1}(k\lg x + 1)$ che si annula per $\lg x = -\frac{1}{k}$ cioè per $x = e^{-\frac{1}{k}}$; l'essere oppure no concava ovviamente dipende dal valore di k; se $k < 1$ da un certo punto in poi è concava (come il logaritmo, rafforzato da una radice), se $k = 1$ e cerchiamo un asintoto, dividiamo per x, e non c'è limite: se $k > 1$ per $x \to 0^+$ la tangente è orizzontale, e da un certo punto in poi la funzione è convessa.

Studiare $y = x \arctan\frac{1}{x}$
Funzione pari, punto angoloso in 0; infatti $f' = \arctan\frac{1}{x} - \frac{x}{1+x^2}$ che ha limite $\pm\pi/2$. Si noti che la derivata per $x > 0$ è sempre positiva (verificarlo con l'intersezione dei grafici). Per $x \to \infty$ la funzione tende a 1 (è un infinito

per 0, che risolvo dapprima scrivendo x come $\frac{1}{x}$ al denominatore, e così sono arrivato ad un caso $\frac{0}{0}$, e poi ponendo $\frac{1}{x} = t$, e sono arrivato ad un caso $\frac{\arctan t}{t}$ per $t \to 0$ di cui conosco il limite, che vale 1). La derivata seconda è sempre positiva.

Risolvere l'esercizio 8.9 e l'eserc. 8.10 usando gli sviluppi asintotici della p. 196; studiare l'esempio di p. 199, risolvere gli esercizi da 8.11 a 8.14.

Studiare, al variare del parametro α i grafici delle curve:

$$f(x) = e^{\alpha x^2}$$

Le funzioni sono pari, e valgono tutte 1 in $x = 0$. I loro grafici sono curve che assomigliano a parabole in un intorno di $x = 0$; per $\alpha > 0$ sono tutte convesse e vanno all'infinito per $x \to \infty$; per $\alpha < 0$ sono curve che vanno a 0 per $x \to \infty$, e quindi hanno dei flessi (la derivata prima ha un minimo, ricordare il teor. di Rolle).

****

Non fanno parte del programma d'esame: dim. di 7.1; dall'ultima riga di p. 179 alla fine del cap. 7; dim. del teor. 8.1; dim. del teor. 8.2; esercizio 8.3; esercizio 8.4; la seconda metà della p. 191; dim. del teor. 8.4; eserc. 8.8; dim. del caso e) di 8.1.1; da 8.2 in poi.