M159sett.tex

9a settimana
Inizio 21.11.2005

Definizione di *parte principale* di un infinitesimo (e analogamente di un infinito), di *parte complementare* (gli infinitesimi di ordine superiore).

Studiare la funzione

$$f(x) = \sin x - \frac{1}{3}\sin 3x$$

Si nota che è dispari, è periodica, di periodo 2π, vicino all'origine si comporta come un infinitesimo del 3^o ordine, precisamente come x^3: basta sviluppare con la formula di Taylor sia $\sin x$ che $\sin(3x)$ (che si ottiene dalla precedente mettendo $3x$ al posto di x), si vede che si eliminano le parti principali e resta una parte del 3^o ordine.

Maggiorazione del resto nella formula di Taylor, dove il resto n-simo, all'interno dell'intervallo $[x_0, x_0 + h]$, viene scritto come

$$R_n(x_0, h) = \frac{f^{n+1}(x_0 + \theta h)}{(n+1)!}$$

(dove θ è un numero compreso tra 0 e 1). Non sappiamo in che punto è calcolata la derivata, ma se ad esempio la derivata fosse limitata in quell'intervallo, potremmo maggiorare quella derivata con il massimo del suo modulo. Ad esempio, se si dovesse calcolare quale è, al massimo, l'errore quando si trascura il resto se si vuole calcolare $\sin x$ in un punto vicino allo 0, si sa già che in qualsiasi punto dell'intervalo il coseno o il seno non valgono più di 1, e quindi l'ultimo termine è facilmente maggiorabile.

Del pari, se volessi calcolare e^1 tramite la funzione esponenziale, si potrebbe calcolare la formula di Taylor dell'esponenziale e poi maggiorare il resto.

Abbiamo visto che se volessi maggiorare il resto della formula del logaritmo vicino al punto 1 (e quindi calcolo $\lg(1+x)$ noterei che le derivate porgono numeri sempre più piccoli: $(-1)^n \frac{1}{n}$, però per approssimare a meno di un centesimo ci vogliono 100 termini.

Calcolo per parti:

$$\int 1 \cdot \arcsin x \, dx = x \arcsin x - \int x \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \, dx = \; = x \arcsin x + \sqrt{1-x^2} + c$$

Notare che si può calcolare facilmente una primitiva di $x^n e^{kx}$ anche con $k < 0$, ma *non* si può calcolare una primitiva di $x^{-n} e^{kx}$. Quando si dice che non la si può calcolare si intende *in termini finiti*, cioè usando solo

funzioni elementari, come le potenze e le loro inverse, le esponenziali e le loro inverse, le trigonometriche e le loro inverse). Non esiste una combinazione o composizione di queste funzioni elementari che esprima una primitiva di $x^{-n}e^{kx}$.
Del pari non sono esprimibili in termini finiti le primitive del tipo

$$\int \frac{x}{\lg x}\,dx, \qquad \int \frac{\arcsin x}{x}\,dx, \qquad \int \frac{\arccos x}{x}\,dx, \qquad \int \frac{\arctan x}{x}\,dx$$

È invece facilmente calcolabile $\int \frac{(\lg x)^n}{x}\,dx$ ponendo $\lg x = t$.
Per una lista di primitive immediate e di primitive non esprimibili in termini finiti, vd. 7.2, pp. 163-169.

Studio della funzione

$$f(x) = \frac{\sin x}{\sqrt{2} + \cos x}$$

È continua, periodica di periodo 2π, dispari. la f' si annulla per $x = \pm\frac{\pi}{4}$.

Studio, al variare del parametro a, della funzione

$$g(x) = e^{ax^2}$$

Sono funzioni pari; per $a > 0$ sono simili a parabole con minimo che vale 1 in $x = 0$, per $a < 0$ tendono a zero per $x \to \infty$ ed hanno massimo che vale 1 per $x = 0$.

Studio (per casa) della funzione $f(x) = x^a \lg x$.
Per $x \to 0^+$ a seconda di a tende a 0^- con tangente verticale se $a \leq 1$, invece con tangente orizzontale se $a > 1$. Inoltre se $a \leq 1$ la funzione ha un minimo e un flesso dopo il punto di minimo, mentre se $a > 1$ ha un minimo e un flesso tra $x = 0$ e il punto di minimo.

Studio (per casa) della funzione

$$f(x) = \sqrt[3]{x^3 - 1}$$

<u>Attenzione</u>: chi dà significato alla radice cubica anche per il radicando negativo trova che l'i.d.d. è tutta la retta, che la funzione tende all'infinito per $x \to \pm\infty$ avendo come asintoto la retta $y = x$ e trova che la derivata prima si annulla in 0 e che lì c'è un flesso a tangente orizzontale, mentre in $x = 1$ c'è un flesso a tangente verticale.
Chi invece sceglie di definire la radice considerando equivalenti le espressioni $\sqrt[3]{x^3 - 1}$ e $(x^3 - 1)^{1/3}$ deve imporre che il radicando, in quanto base di una potenza, sia positivo o nullo, e quindi trova soltanto una parte del grafico, da 1 in poi.

Studio della funzione

$$f(x) = \frac{1}{x-1} e^{-\frac{2}{\sqrt{x}}}$$

Definita per $x > 0, \quad x \neq 1$; tende a 0^- per $x \to 0^+$, a $-\infty$ per $x \to 1^-$, a $+\infty$ per $x \to 1^+$, a 0 per $x \to +\infty$. Decrescente tra 0 e 1 e tra 1 e $+\infty$. In 0 si attacca con tangente orizzontale.

Studio della funzione

$$f(x) = \frac{x}{\lg x}$$

definita per $x > 0, \quad x \neq 1$, va a 0 con tangente orizzontale per $x \to 0^+$, va a $-\infty$ per $x \to 1^-$, va a $+\infty$ per $x \to 1^+$, va all'infinito (regola dell'Hopital) per $x \to +\infty$, ha un minimo in $x = e$ che vale e ed ha un flesso in $x = e^2$.

Studio della funzione

$$f(x) = \frac{e^{-\frac{1}{2x}}}{\sqrt{x+1}}$$

In parte per casa; la f è sempre positiva, ha dominio $\{]-1, 0[\} \cup \{]0, +\infty[\}$, va a $+\infty$ per $x \to 1^+$ e per $x \to 0^-$, va a 0 per $x \to 0^+$ e per $x \to +\infty$. Nel primo intervallo del dominio ha un minimo, nel secondo ha un massimo; la tangente destra nello 0 è orizzontale, per cui dopo lo 0 ci saranno due flessi, uno tra lo 0 e il punto di massimo e l'altro tra il punto di massimo e l'infinito (in ognuno di questi due intervalli la f' avrà un punto in cui la sua derivata, cioè la f'', si annulla).
Si ricorda che dove la derivata ha un massimo, il flesso è *discendente* cioè il grafico passa da sopra la tangente a sotto, dove ha un minimo il flesso è *ascendente*, cioè il grafico passa da sotto a sopra la tangente.

Studio della funzione

$$f(x) = \frac{e^{2x+1}}{1-e^x}$$

Definita per $x \neq 0$, tende a 1 per $x \to -\infty$, tende a $\pm\infty$ rispettivamente per $x \to 0$ da sinistra e da destra, tende a $-\infty$ per $x \to +\infty$.
<u>Attenzione</u>: per il calcolo di quest'ultimo limite la regola di l'Hospital non funziona perché derivando si ottiene sempre un caso $\frac{\infty}{\infty}$. Si deve rilevare invece che l'infinito del tipo e^{2x} è di ordine maggiore di quello di e^x (si divide e^{2x} per e^x e resta e^x).

Verifica della disuguaglianza

$$|\sin b - \sin a| \leq |b - a|$$

Infatti per il teor. di Lagrange (o del valor medio) è

$$\frac{\sin b - \sin a}{b - a} = f'(\xi)$$

dove ξ è un punto dell'intervallo $[a, b]$. Poiché la derivata del seno è il coseno, questo è sempre in modulo ≤ 1.

Quale è più grande in un intorno di 0, $\sin x^2$ o $\sin^2 x$?
Sono infinitesimi entrambi del secondo ordine, con parte principale x^2; poi il $\sin x^2$ toglie un infinitesimo del 6 ordine, mentre $\sin^2 x$ toglie un infinitesimo del 4^o, e quindi toglie di più. Il più grande è $\sin x^2$.

Richiamo della divisione tra polinomi del tipo

$$\frac{x^3 - x^2}{x^2 + x + 1}$$

Si trova un quoziente, che ha grado minore del numeratore (più precisamente ha grado uguale alla differenza tra il grado del numeratore e quello del denominatore), ed un resto, che ha grado minore del denominatore (nel nostro caso il quoziente ha grado 1 e il resto pure). Ai fini dell'integrazione abbiamo quindi una funzione razionale fratta *propria*, cioè con il grado del numeratore inferiore al grado del denominatore.

Primitive di una funzione razionale fratta in cui il numeratore è la derivata del denominatore; risulta:

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\, dx = \lg |f(x)| + c$$

(leggere gli esempi di 7.3 fino a p. 179; la scomposizione in fratti semplici è richiamata, essendo nota dalla scuola media).

Scrittura di una funzione razionale fratta in modo che al numeratore compaia la derivata del denominatore ed eventualmente altri termini che vanno gestiti successivamente, del tipo

$$\frac{x-3}{x^2+x+1} = \frac{1}{2}\frac{2x-6}{x^2+x+1} = \frac{1}{2}\left(\frac{2x+1}{x^2+x+1} - \frac{7}{x^2+x+1}\right)$$

Nell'ultimo membro il primo termine si integra facilmente e una primitiva risulta $\lg(x^2+x+1)$. Resta il termine $\frac{7}{x^2+x+1}$. Il denominatore lo possiamo scrivere sotto la forma $1+t^2$ se consideriamo x come il doppio prodotto di x per $\frac{1}{2}$; risulta allora $x^2+x+1 = (x+\frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}$. Dividendo quest'ultima espressione per $\frac{3}{4}$ otteniamo

$$\frac{1}{x^2+x+1} = \frac{4}{3}\frac{1}{\left(\frac{x+\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\right)^2 + 1}$$

Tralasciando i coefficienti, abbiamo come primitiva $\frac{4}{3}\frac{\sqrt{3}}{2}\arctan\left(\frac{x+\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\right)$ e tutte le altre si ottengono aggiungendo una costante arbitraria.

Calcolo dell'integrale

$$\int \sqrt{x+3}(2x+9)\ dx$$

Si pone $\sqrt{x+3} = t$, da cui $x+3 = t^2$ da cui $x = t^2 - 3$.
La notazione $x'(t) = \frac{dx}{dt}$ è particolarmente comoda, perché consente formalmente la scrittura $dx = x'(t)\ dt$; poiché è $x'(t) = 2t$ abbiamo, sostituendo le x con le loro espressioni tramite la t e il dx con la sua espressione tramite t e dt,

$$\int \sqrt{x+3}(2x+9)\ dx = \int t(2t^2-6)2t\ dt = \int 4t^4 - 12t^2\ dt$$

e di qui l'integrazione è quella di un polinomio, e quindi immediata:

$$\frac{4}{5}t^5 - 4t^3 + c$$

Sostituendo nuovamente a t la sua espressione in x abbiamo

$$\frac{4}{5}(\sqrt{x+3})^5 - 4(\sqrt{x+3}^3 + c$$

Dato un infinitesimo $g(x)$ definiamo il simbolo $o(g)$ come un *infinitesimo che tende a 0 di ordine maggiore dell'ordine di g.*
Possiamo allora scrivere, ad esempio, lo sviluppo di Taylor del seno o dell'esponenziale con il resto successivo al termine che contiene la derivata 3^a così:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + o(x^3); \qquad e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + o(x^3)$$

Studio della funzione

$$f(x) = x^2 - \sin x^2$$

Sempre positiva, pari. Vicino allo 0 si schiaccia del 6*o* ordine. La derivata è $f'(x) = 2x - cosx^2 \cdot 2x$ che si annulla in 0 e in tutti i punti in cui $\cos x^2 = 0$, cioè per $x = \sqrt{\frac{\pi}{2} + k\pi}$ ed è sempre positiva per $x > 0$ e negativa per $x < 0$. La funzione quindi decresce sulla semiretta dei reali negativi e cresce su quella dei reali positivi.

Studio della funzione

$$f(x) = \sqrt{\frac{x(x-2)}{x^2-1}}$$

Non definita in $x = \pm 1$, e inoltre negli intervalli (aperti) dove il radicando è negativo, cioè tra -1 e 0 e tra 1 e 2. È quindi definita, e vale 0, in $x = 0$ e $x = 2$. La derivata è

$$f'(x) = \frac{1}{2f(x)} \frac{2(x^2 - x - 1)}{(x^2 - 1)^2}$$

e quindi va all'infinito dove $f(x) = 0$, cioè la tangente (per l'esattezza, la semitangente destra) nei punti 0 e 2 è verticale. La f tende a 1 per $x \to \infty$. Derivata sempre > 0, la f è crescente nei singoli intervalli di definizione. C'è un flesso (ascendente) tra 0 e 1.

Studio della funzione

$$g(x) = \frac{x \lg x}{1 - x}$$

I.d.d.: $x \neq 0,\ x \neq 1$. Risulta però prolungabile per continuità sia in 0 dando il valore 0 che in 1 dando il valore -1. Il limite per $x \to \infty$ è $-\infty$.
La derivata è $\frac{\lg x + 1 - x}{(1-x)^2}$ che è sempre negativa, ed esiste anche in $x = 1$ (due volte l'Hospital). La semitangente destra in 0 è verticvale.

Studio della funzione

$$f(x) = \arcsin \sqrt{2x - x^2}$$

Il dominio è $0 \leq x \leq 2$; la funzione è sempre positiva o nulla, si annula agli estremi, la derivata non esiste in 1, è positiva da 0 a 1 e negativa da 1 a 2.

Calcolo dei limiti

$$\lim x \to 0 \frac{\sin x - x \cos x}{x^2 \operatorname{tg} x}$$

Risulta 1/3.

$$\lim_{x \to 0} \frac{x^2 - 2 + 2 \cos x}{x^2 (1 - \cos x)}$$

Risulta 1/6.

Di che ordine è l'infinitesimo (per $x \to 0$)

$$\sin x - x \cosh x \ ?$$

(Lo sviluppo del coseno iperbolico è come quello del coseno, solo che ha tutti i segni +; del pari quello del seno iperbolico è come quello del seno, solo che ha tutti i segni +.

Dimostrare che un polinomio che assume k volte il valore 4 ha la derivata che si annula almeno $k - 1$ volte.
Quale è il grado minimo di tale polinomio (che non sia la costante $y = 4$)?
(Suggerimento: considerare il teor. di Rolle e il principio di identità dei polinomi)