

## MATEMATICA 1

Corsi di Laurea in Ingegneria Elettrotecnica e in Ingegneria Energetica

Prova parziale del 3.11.2005

Tempo concesso: 90 minuti

## Tema A

**N.B. - Le risposte vanno giustificate, dicendo quali teoremi si applicano, o tramite esempi.**

## Abbozzo di soluzioni

I numeri di paragrafi e pagine se riferiscono al libro di testo: Barozzi - Bergamaschi - Gonzalez, *Nuovo calculus*, Progetto, 2002.

1. Si dica cosa significa  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$  e si faccia un grafico di una funzione che goda di questa proprietà. La funzione  $x + \sin x$  gode di questa proprietà? Perché?

**Sol.-** Per la def. di limite, vd. p. 65. La funzione in questione gode della proprietà, in quanto è la somma di un infinito per una funzione limitata.

2. Una funzione limitata in un intorno di un punto  $x_0$  può non avere limite per  $x \rightarrow x_0$ . Si faccia un esempio di questa situazione. Se viceversa ha limite  $\ell$  finito per  $x \rightarrow x_0$ , essa è limitata in un intorno di  $x_0$ ? Se sì, dire perché; se no, trovare un controesempio.

**Sol.-** Esempio:  $\sin \frac{1}{x}$  per  $x \rightarrow 0$  non ha limite, tuttavia è limitata tra -1 e 1. Una funzione che ha limite finito è limitata nell'intorno di  $x_0$  per la proprietà della limitatezza locale (p. 61).

3. Si disegnino sull'asse reale i punti che soddisfano la disuguaglianza doppia  $0 < |x - 3| < 5$ .

**Sol.-** Sono i punti che distano da 3 per meno di 5, e con il 3 escluso; quindi  $\{ ] - 2, 3[ \cup ] 3, 8[ \}$ .

4. Si trovino l'immagine e gli estremi superiore e inferiore della funzione  $f(x) = \lg \sqrt{x^2 - 3}$ . Se ne abbozzi quindi il grafico.

**Sol.-** L'insieme di def. è l'unione di due semirette  $\{-\infty, -\sqrt{3}\} \cup \{\sqrt{3}, \infty[ \}$ ; è una funzione pari, decrescente da  $+\infty$  a  $-\infty$  sulla semiretta negativa, crescente sull'altra da  $-\infty$  a  $+\infty$ ; la sua immagine è  $\mathbb{R}$ . Interseca l'asse delle ascisse in  $x = \pm\sqrt{3}$ .

5. Si indichino l'insieme di definizione, l'immagine e un abbozzo del grafico per la funzione  $f(x) = \arcsin x$ . Quali sono i grafici delle funzioni  $g_1 = |\arcsin x|$  e  $g_2 = \arcsin|x|$ ? Queste tre funzioni sono derivabili nel loro insieme di definizione?

**Sol.-** Per il grafico di  $f$  vd. p. 125; i grafici di  $g_1$  e  $g_2$  coincidono: sono funzioni pari, con dominio quello di  $f$  e codominio l'intervallo  $[0, \pi/2]$ ; per  $0 \leq x \leq 1$  coincidono con  $f$ .  $f$  è derivabile dappertutto, mentre  $g_1$  e  $g_2$  non lo sono in 0 (la derivata sinistra è -1, quella destra è +1).

6. Se una funzione tende all'infinito per  $x \rightarrow 10$ , quale infinito si prende per confronto? Si definisca quindi cosa significa che  $f(x)$  è un *infinito di ordine  $k$*  rispetto a tale infinito di confronto. La funzione  $f(x) = (x - 10)^2 - \frac{1}{|x-10|}$  è un infinito per  $x \rightarrow 10$ ? Se sì, di che ordine?

**Sol.-** Si prende  $\frac{1}{x-10}$ ; si dice che  $f$  è un infinito di ordine  $k$  rispetto a tale infinito se è

$$\lim_{x \rightarrow 10} \frac{f(x)}{\frac{1}{(x-10)^k}} = \ell \neq 0.$$

La funzione in questione è un infinito del primo ordine, perché somma di un un infinitesimo di ordine 2 e di un infinito del primo ordine.

7. Siano  $f$  e  $g$  due infinitesimi di ordine 1 e 2 rispettivamente per  $x \rightarrow x_0$ . La funzione  $f - g$  è anch'essa un infinitesimo per  $x \rightarrow x_0$ ? Se sì, di che ordine?

**Sol.-** È un infinitesimo del primo ordine (l'infinitesimo del 2o va a zero più velocemente e quindi si può trascurare).

8. In un intervallo contenente lo 0, la funzione  $x \arctan^2 x \cos x$  cambia di sicuro segno? È un infinitesimo per  $x \rightarrow 0$ ? Se sì, di che ordine?

**Sol.** - Ovviamente la domanda parla di un intervallo a cui lo 0 è interno. In tale intervallo la funzione è dispari, perché prodotto di una dispari per due pari, è un infinitesimo del terzo ordine, perché prodotto di un infinitesimo del primo per uno del secondo (gli esponenti si sommano...). Pertanto il segno cambia, essendo positivo per gli  $x$  positivi e negativo per gli  $x$  negativi. Il coseno non è un infinitesimo e in quell'intorno ha valori vicini a 1.

9. Enunciare il teor. di Lagrange e farne un'interpretazione grafica.

**Sol.-** Vd. p. 79.

10. Un infinito moltiplicato un infinitesimo potrebbe tendere all'infinito, tendere a zero, tendere a un limite finito, oppure non avere limite. Il candidato faccia un esempio per ciascuno di questi casi.

**Sol.-** Se prendiamo il caso per  $x \rightarrow 0$ , i vari casi di limite infinito, 0, o finito (e diverso da 0) possono essere dati da  $x^{-\alpha} \cdot x$  con  $\alpha > 0$  rispettivamente maggiore, minore o uguale a 1. Il caso di non esistenza del limite può essere esemplificato da  $\frac{1}{x} \cdot x \sin \frac{1}{x}$ .