

MATEMATICA 1

Corsi di Laurea in Ingegneria Elettrotecnica e in Ingegneria Energetica

Prova parziale del 3.11.2005

Tempo concesso: 90 minuti

Tema B

N.B. - Le risposte vanno giustificate, dicendo quali teoremi si applicano, o tramite esempi.

1. Si dica cosa significa $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$ e si faccia un grafico di una funzione che goda di questa proprietà. La funzione $-x + \sin x$ gode di questa proprietà? Perché?
2. Quando un insieme di numeri reali si dice *limitato*, *limitato superiormente*, *limitato inferiormente*? Si faccia un esempio di insieme limitato, scrivendone esplicitamente l'estremo superiore e quello inferiore.
3. La disuguaglianza $|x - 3| < 2$ equivale ad una doppia disuguaglianza. Quale? Si disegni sull'asse reale l'insieme dei punti che vi soddisfa.
4. Si trovino l'insieme di definizione e l'immagine della funzione $f(x) = e^{\sqrt{x^2-1}}$. Se ne abbozzi quindi il grafico.
5. Si indichino l'insieme di definizione, l'immagine e un abbozzo del grafico per la funzione $f(x) = \arccos x$. Quali sono i grafici delle funzioni $g_1(x) = |\arccos x|$ e $g_2(x) = \arccos |x|$? Sono funzioni derivabili in tutti i punti del loro insieme di definizione?
6. Se una funzione tende all'infinito per $x \rightarrow 2$, quale infinito si prende per confronto? Si definisca quindi cosa significa che $f(z)$ è un *infinito di ordine k* rispetto a tale infinito di confronto. La funzione $f(x) = \frac{1}{x^2-2}$ è un infinito per $x \rightarrow 2$? Se sì, di che ordine?
7. Siano f e g due infinitesimi di ordine 1 e 2 rispettivamente per $x \rightarrow x_0$. La funzione $f - g$ è anch'essa un infinitesimo per $x \rightarrow x_0$? Se sì, di che ordine?
8. In un intervallo contenente lo 0, la funzione $x^2 \sin x \cos x$ cambia di sicuro segno? È un infinitesimo per $x \rightarrow 0$? Se sì, di che ordine?
9. Dimostrare il teorema secondo il quale se una funzione ha un massimo o un minimo in un punto interno ad un intervallo, ed è derivabile in quel punto, la sua derivata si annulla in quel punto. Si presenti poi un caso in cui non vale la tesi perché manca una o un'altra delle ipotesi.
10. Data una funzione f derivabile in un intervallo contenente il punto $x = 1$, sia $f(1) = -10$, $f'(1) = -3$. Si scriva l'equazione della retta tangente al grafico della funzione nel punto $(1, -10)$.