MATEMATICA 1

Corsi di Laurea in Ingegneria Elettrotecnica e in Ingegneria Energetica

Prova parziale del 3.11.2005 Tempo concesso: 90 minuti

**Tema B**

**N.B. - Le risposte vanno giustificate, dicendo quali teoremi si applicano, o tramite esempi.**

**Abbozzo di soluzioni**

I numeri di paragrafi e pagine se riferiscono al libro di testo: Barozzi - Bergamaschi - Gonzalez, *Nuovo calculus*, Progetto, 2002.

1. Si dica cosa significa $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$ e si faccia un grafico di una funzione che goda di questa proprietà. La funzione $-x + \sin x$ gode di questa proprietà? Perché?
   **Sol.**- Per la def. di limite, vd. p. 65. La funzione in questione gode della proprietà, in quanto è la somma di una funzione che va a $-\infty$ per $x \to +\infty$ per una funzione limitata.

2. Quando un insieme di numeri reali si dice *limitato*, *limitato superiormente*, *limitato inferiormente*? Si faccia un esempio di insieme limitato, scrivendone esplicitamente l'estremo superiore e quello inferiore.
   **Sol.**- Un insieme si dice *limitato* quando lo è sia superiormente (cioè ammette maggioranti) sia inferiormente (cioè ammette minoranti). Un insieme limitato può essere l'intervallo $[0, 1]$ i cui estremi superiore e inferiore sono 1 e 0 rispettivamente.

3. La disuguaglianza $|x - 3| < 2$ equivale ad una doppia disuguaglianza. Quale? Si disegni sull'asse reale l'insieme dei punti che vi soddisfa.
   **Sol.**- $1 < x < 5$.

4. Si trovino l'insieme di definizione e l'immagine della funzione $f(x) = e^{\sqrt{x^2-1}}$. Se ne abbozzi quindi il grafico.
   **Sol.**- Funzione definita per $|x| \geq 1$, pari, con grafico simmetrico rispetto all'asse $y$; per gli $x \geq 1$ è crescente da 1 a $+\infty$, la sua immagine è quindi $[0, +\infty[$. L'attacco al punto $x = 1$ è con la tangente verticale (la $f' = e^{\sqrt{x^2-1}} \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2-1}}$ va a $+\infty$ per $x \to 1^+$). Verso l'infinito ha una grafico convesso, simile a quello di $e^x$.

5. Si indichino l'insieme di definizione, l'immagine e un abbozzo del grafico per la funzione $f(x) = \arccos x$. Quali sono i grafici delle funzioni $g_1(x) = |\arccos x|$ e $g_2(x) = \arccos |x|$? Sono funzioni derivabili in tutti i punti del loro insieme di definizione?
   **Sol.**- Per il grafico, dominio e immagine dell'arcocoseno vd. p. 126. Essendo $f$ positiva, il grafico di $g_1$ coincide con quello di $f$; $g_2$ è pari e il suo grafico coincide con quello di $f$ per gli $x \geq 0$, ed è simmetrico rispetto all'asse $y$ per gli $x \leq 0$. $f$ e $g_1$ sono derivabili ovunque, mentre $g_2$ ha un punto angoloso in 0 (derivata sinistra +1, derivata destra -1).

6. Se una funzione tende all'infinito per $x \to 2$, quale infinito si prende per confronto? Si definisca quindi cosa significa che $f(x)$ è un *infinito di ordine* $k$ rispetto a tale infinito di confronto. La funzione $f(x) = \frac{1}{x^2-2}$ è un infinito per $x \to 2$? Se sì, di che ordine?
   **Sol.**- Si prende $\frac{1}{x-2}$; si dice che $g$ è un infinito di ordine $k$ rispetto a questo infinito se è
   $$\lim_{x\to 2} \frac{g(x)}{(\frac{1}{x-2})^k} = \ell \neq 0.$$
   La funzione $f$ non è un infinito (il denominatore non si annulla per $x = 2$).

7. Siano $f$ e $g$ due infinitesimi di ordine 1 e 2 rispettivamente per $x \to x_0$. La funzione $f + g^2$ è anch'essa un infinitesimo per $x \to x_0$? Se sì, di che ordine?
   **Sol.**- È un infinitesimo di ordine 1.

8. In un intervallo contenente lo 0, la funzione $x^2 \sin x \cos x$ cambia di sicuro segno? È un infinitesimo per $x \to 0$? Se sì, di che ordine?
   **Sol.**- Ovviamente l'esercizio intende un intervallo a cui lo 0 è interno. In questo caso la funzione cambia segno, essendo negativa a sinistra di 0 e positiva a destra. È un infinitesimo del terzo ordine.

9. Dimostrare il teorema secondo il quale se una funzione ha un massimo o un minimo in un punto interno ad un intervallo, ed è derivabile in quel punto, la sua derivata si annulla in quel punto. Si presenti poi un caso in cui non vale la tesi perché manca una o un'altra delle ipotesi.
   **Sol.**- È l'es. 3.1 di p. 80. Un caso in cui mancando una ipotesi viene a cadere la tesi può essere $f(x) = |x|$ che ha un minimo in $x = 0$ mentre la derivata non è mai nulla, essendo -1 per gli $x < 0$ e +1 per gli $x > 0$.

10. Data una funzione $f$ derivabile in un intervallo contenente il punto $x = 1$, sia $f(1) = -10$, $f'(1) = -3$. Si scriva l'equazione della retta tangente al grafico della funzione nel punto $(1, -10)$.
    **Sol.**- $y + 10 = -3(x - 1)$.