

MATEMATICA 1

Corsi di Laurea in Ingegneria Elettrotecnica e in Ingegneria Energetica

Prova parziale del 3.11.2005

Tempo concesso: 90 minuti

Tema C

N.B. - Le risposte vanno giustificate, dicendo quali teoremi si applicano, o tramite esempi.

Abbozzo di soluzioni

I numeri di paragrafi e pagine se riferiscono al libro di testo: Barozzi - Bergamaschi - Gonzalez, *Nuovo calculus*, Progetto, 2002.

1. Si dica cosa significa $\lim_{x \rightarrow -5^+} f(x) = -\infty$ e si faccia un grafico di una funzione che goda di questa proprietà. La funzione $f(x) = \frac{1}{|x+5|}$ gode di questa proprietà? Perché?

Sol. - Per la def. di limite, vd. p. 65. La funzione in questione non gode della proprietà, dato che è sempre positiva.

2. Una funzione limitata in un intorno di un punto x_0 può non avere limite, né finito né infinito, per $x \rightarrow x_0$. Si faccia un esempio di questa situazione. Se viceversa ha limite ℓ finito per $x \rightarrow x_0$, essa è limitata in un intorno di x_0 ? Se sì, dire perché; se no, trovare un controesempio.

Sol. - Esempio: $\sin \frac{1}{x}$ per $x \rightarrow 0$ non ha limite, tuttavia è limitata tra -1 e 1. Una funzione che ha limite finito è limitata nell'intorno di x_0 per la proprietà della limitatezza locale (p. 61).

3. Si disegnino sull'asse reale i punti che soddisfano la disuguaglianza doppia $0 < |x - 2| < 7$.

Sol. - Sono quelli che distano da 2 per meno di 7, escluso il 2 stesso; quindi $] - 5, 2[\cup] 2, 9[$.

4. Si trovino l'immagine e gli estremi superiore e inferiore della funzione $f(x) = \lg \sqrt{|x - 2|}$. Se ne abbozzi quindi il grafico.

Sol. - $x \neq 2$; la funzione ha un grafico simmetrico rispetto alla retta $x = 2$, ha un asintoto verticale in $x = 2$, va a $-\infty$ per $x \rightarrow 2$, va a $+\infty$ per $x \rightarrow \pm\infty$; quindi ad esempio sulla semiretta $]2, +\infty[$ è $\sup f(x) = +\infty$ e $\inf f(x) = -\infty$; per il teorema di tutti i valori compresi, la sua immagine è tutto $\mathbb{R}$.

5. Si indichino l'insieme di definizione, l'immagine e un abbozzo del grafico per la funzione $f(x) = \arctan x$. Quale è la sua derivata? Quali sono i grafici delle funzioni $g_1 = |\arctan x|$ e $g_2 = \arctan |x|$? Queste tre funzioni sono derivabili nel loro insieme di definizione?

Sol. - Per il grafico dell'arcotangente vd. p. 114; l'insieme di definizione è l'intera retta, la sua immagine è l'intervallo aperto $] - \pi/2, +\pi/2[$. La derivata è $\frac{1}{1+x^2}$. g_1 e g_2 hanno lo stesso grafico che è simmetrico rispetto all'asse y e coincide con il grafico dell'arcotangente per $x \geq 0$.

La f è derivabile ovunque, invece le altre due non sono derivabili per $x = 0$ dove c'è un punto angoloso.

6. Se una funzione tende a 0 per $x \rightarrow -\infty$, quale infinitesimo si prende per confronto? Si definisca quindi cosa significa che $f(x)$ è un *infinitesimo di ordine k* rispetto a tale infinitesimo di confronto. La funzione $f(x) = (x - 10) - \frac{1}{|x-10|}$ è un infinitesimo per $x \rightarrow -\infty$? Se sì, di che ordine?
Sol.- Si prende $\frac{1}{x}$; si dice che f è un infinitesimo di ordine k rispetto a tale infinitesimo se è

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{\frac{1}{x^k}} = \ell \neq 0.$$

La funzione in questione non è un infinitesimo, anzi è un infinito (del primo ordine), perché somma di un un infinitesimo di ordine 1 e di un infinito del primo ordine.

7. Siano f e g due infinitesimi di ordine 1 e 2 rispettivamente per $x \rightarrow x_0$. La funzione $f \cdot g$ è anch'essa un infinitesimo per $x \rightarrow x_0$? Se sì, di che ordine?

Sol.- È un infinitesimo del terzo ordine. Infatti se $\frac{f}{x-x_0} \rightarrow \ell_1 \neq 0$ e $\frac{g}{(x-x_0)^2} \rightarrow \ell_2 \neq 0$, risulta, essendo il limite del prodotto uguale a $\ell_1 \cdot \ell_2 \neq 0$, $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{fg}{(x-x_0)^3} = \ell_1 \cdot \ell_2 \neq 0$.

8. In un intervallo contenente lo 0, la funzione $x \arctan^2 x + \cos x$ cambia di sicuro segno? È un infinitesimo per $x \rightarrow 0$? Se sì, di che ordine?

Sol.- Ovviamente la domanda parla di un intervallo a cui lo 0 è interno. In tale intervallo la funzione non è né pari né dispari, è la somma di un infinitesimo del terzo ordine (perché prodotto di un infinitesimo del primo per uno del secondo, gli esponenti si sommano...) con una funzione, il coseno, che non è infinitesima, e quindi *non* è un infinitesimo, ma in quell'intorno ha valori vicini a 1.

9. Enunciare il teor. di Weierstrass e presentare poi un caso in cui, pur venendo a cadere una delle ipotesi, tuttavia sussiste ancora la tesi.

Sol.- Vd. p. 71. Come esempio in cui, pur cadendo un'ipotesi, sussiste ancora la tesi potrebbe essere la funzione $\sin x$ considerata su tutta la retta: non siamo più su un intervallo chiuso e limitato, però il massimo e il minimo ci sono lo stesso.

10. Sia $P(x)$ un polinomio di grado dispari. Si dica quale è l'immagine della funzione $\frac{1}{P(x)}$.

Sol.- Se il polinomio è di grado dispari, tende all'infinito con un segno per $x \rightarrow +\infty$ e all'infinito con segno opposto per $x \rightarrow -\infty$, a seconda del segno del coefficiente del termine di grado massimo. Pertanto assume tutti i valori reali, compreso lo 0, che è assunto almeno una volta

e non più di n volte, se n è il grado del polinomio. Allora $f = \frac{1}{P(x)}$ tende a 0 per $x \rightarrow \pm\infty$, ha almeno un punto in cui non è definita, e ha al più un numero finito n di tali punti di non definizione. Prendiamo il più piccolo di questi, chiamiamolo x_1 . In un intorno di tale punto la funzione va all'infinito col + o col - da destra e da sinistra rispettivamente. Se, supponiamo, il coefficiente del termine di grado massimo era positivo, la f sulla semiretta $] - \infty, x_1[$ è decrescente da 0 (non raggiunto) a $-\infty$. Per il teor. di tutti i valori compresi, l'intervallo $]0, -\infty[$ appartiene all'immagine. Analogamente, sia x_n il più grande dei punti in cui $P(x)$ si annulla, e quindi in $x = x_n$ c'è un asintoto verticale; poiché abbiamo supposto che il coeff. del termine di grado massimo fosse positivo, la f va a $+\infty$ per $x \rightarrow x_n^+$ e va a 0 per $x \rightarrow +\infty$, restando sempre positiva (la f ovviamente non si annulla mai, non annullandosi mai il suo numeratore). Per il teor. di tutti i valori, l'intervallo $]0, +\infty[$ appartiene all'immagine, che quindi è costituita da tutti i reali escluso lo 0.