MATEMATICA 1

Corsi di Laurea in Ingegneria Elettrotecnica e in Ingegneria Energetica

Prova parziale del 3.11.2005 Tempo concesso: 90 minuti

Tema D

N.B. - Le risposte vanno giustificate, dicendo quali teoremi si applicano, o tramite esempi.

Abbozzo di soluzioni

I numeri di paragrafi e pagine se riferiscono al libro di testo: Barozzi - Bergamaschi - Gonzalez, *Nuovo calculus*, Progetto, 2002.

1. Si dica cosa significa $\lim_{x \to 2^-} f(x) = -3$ e si faccia un grafico di una funzione che goda di questa proprietà. La funzione $f(x) = |x-2| - 3$ gode di questa proprietà? Perché?
   Sol.- Per la def. di limite, vd. p. 65. La funzione in questione gode della proprietà, in quanto è continua nel punto $x = 2$ ed è $f(2) = -3$.

2. La funzione $f(x) = x(\cos x - 5)$ è pari, dispari, periodica? Ha limite per $x \to +\infty$? E per $x \to -\infty$? Se sì, quanto valgono?
   Sol.- È dispari, non periodica; ha limiti rispettivamente $-\infty$ e $+\infty$ in quanto è il prodotto di un infinito per una funzione limitata che si stacca dallo 0 e che ha sempre valore negativo.

3. Si disegnino sull'asse reale i punti che soddisfano la disuguaglianza doppia $0 < |x+2| < 1$.
   Sol.- Sono i punti da -3 a -1, escluso il -2.

4. Si trovino l'immagine e gli estremi superiore e inferiore della funzione $f(x) = \lg(\arctan|x-2|)$. Se ne abbozzi quindi il grafico.
   Sol.- Non è definita per $x = 2$, ha un grafico simmetrico rispetto alla retta $x = 2$ che è un asintoto verticale; va a $-\infty$ per $x \to 2$ e va a $+\lg\frac{\pi}{2}$ per $x \to \pm\infty$. Il grafico incontra l'asse delle x dove è $\arctan|x-2| = 1$ (*non* si tratta dei punti 1 e 3).

5. Si indichino l'insieme di definizione, l'immagine e un abbozzo del grafico per la funzione $f(x) = \arctan 2x$. Quale è la sua derivata? Quale è la tangente al suo grafico nel punto $(\frac{1}{2}, f(\frac{1}{2}))$?
   Sol.- Il grafico è simile a quello dell'arcotangente, ha solo un andamento più ripido (la derivata è $f'(x) = \frac{2}{1+4x^2}$, che in 0 vale 2). L'immagine è $]-\pi/2, \pi/2[$ (*non* $]-\pi, \pi[$). La tangente richiesta è $y - f(\frac{1}{2}) = f'(\frac{1}{2})(x - (\frac{1}{2}))$, cioè $y - \frac{\pi}{4} = x - \frac{1}{2}$.

6. Si dia la definizione di funzione continua in un punto x_0, e si enunci un teorema che riguarda le funzioni continue in un intervallo.
   Sol.- Vd. p. 68 e seguenti.

7. Siano f e g due infinitesimi entrambi del primo ordine per $x \to 0$. La funzione $f \circ g$ è anch'essa un infinitesimo per $x \to 0$? Se sì, di che

ordine?
Sol.- È un infinitesimo del primo ordine.

8. In un intervallo contenente lo 0, la funzione $x \arctan^2 x + \sin x$ cambia di sicuro segno? È un infinitesimo per $x \to 0$? Se sì, di che ordine?
Sol.- Ovviamente la domanda parla di un intervallo a cui lo 0 è interno. In tale intervallo la funzione è dispari, perché somma di due funzioni dispari, è infinitesima per $x \to 0$ e quindi essendo dispari cambia segno in 0. L'ordine di infinitesimo è il primo.

9. Enunciare il teor. di Weierstrass e presentare poi un caso in cui, venendo a cadere una delle ipotesi, cade anche la tesi.
Sol.- Vd. p. 71. Un caso in cui cadendo un'ipotesi cade anche la tesi può essere la funzione $\frac{1}{x}$ che non è definita su un intervallo chiuso.

10. Sia $P(x)$ un polinomio di grado pari. Si dica se esistono, ed eventualmente quanto valgono i limiti per $x \to +\infty$ e per $x \to -\infty$ della funzione $P(x) - \sin x$.
Sol.- Per $x \to \pm\infty$ il polinomio va all'infinito col segno + o - a seconda del segno del coefficiente del termine di grado massimo. La funzione in questione tende all'infinito allo stesso modo, trattandosi della somma di un infinito e di una funzione limitata.