MATEMATICA I

Corsi di Laurea in Ingegneria Elettrotecnica e in Ingegneria Energetica

Esercitazione in classe del 28.11.2005 Tempo concesso: 90 minuti

Abbozzo di soluzioni

(i numeri si riferiscono al libro di testo)

1. a) Trovare tutte le primitive di

$$\sqrt{x} + x \lg x + \sin x;$$

quindi tra queste trovare quella che nel punto 1 vale 1.
Sol. - Le primitive sono date da $\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + \frac{x^2}{2}\lg x - \frac{x^2}{4} - \cos x + c$; imponendo che valga 1 in $x = 1$ la primitiva risulta quella con $c = \frac{7}{12} + \cos 1$.
b) Tra le primitive di $\lg x + \arctan x$ trovare quella che nel punto 1 vale 0.
Sol. - Le primitive sono $f(x) = x \lg x - x + x \arctan x - \frac{1}{2}\lg(1 + x^2) + c$, e la condizione dà $c = 1 - \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\lg 2$.
c) Si calcoli l'area della regione compresa tra le curve di equazione $f(x) = -x^2 - 2x + 1$ e $g(x) = -\frac{2}{x}$. (Suggerimento: si cerchino i punti in cui i due grafici si incontrano...)
Sol. - Il grafico di f è una parabola concava con vertice per $x = -1$ dove vale 2, quello di g è un'iperbole equilatera. Le curve si incontrano in due punti di ascissa -2 e -1. L'area cercata risulta dalla differenza delle aree sottese dai due grafici ed è quindi espressa da

$$\int_{-2}^{-1} \left(-x^2 - 2x + 1 + \frac{2}{x}\right)\, dx = \frac{5}{3} - 2\lg 2$$

d) Si calcoli $\int_0^4 \sin\sqrt{x}\; dx$.
Sol. - Posto $\sqrt{x} = t$ si ha $x = t^2,\ dx = 2tdt$; poiché $0 \le x \le 4$ è $0 \le t \le 2$ e quindi dobbiamo calcolare l'integrale $\int_0^2 \sin t\ 2t\ dt$, che si integra per parti una volta: $-2t\cos t|_0^2 + 2\int_0^2 \cos t\ dt = -4\cos 2 + 2\sin t|_0^2 = -4\cos 2 + 2\sin 2$.

2. a) Studiare la funzione

$$f(x) = \frac{1 - e^x}{e^{2x} + 1}$$

Sol. - Sempre definita, ha valori positivi per $x < 0$, negativi per $x > 0$, si annulla in $x = 0$, per $x \to +\infty$ tende a 0 con valori negativi (con la regola di L'Hospital non si conclude niente, bisogna guardare gli ordini di infinito: quello del denominatore è più grande di quello del numeratore, infatti $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim -\frac{e^x}{e^{2x}} = 0$), per $x \to -\infty$ tende a 1 con valori minori di 1 (il numeratore è < 1, il denominatore è > 1). Vale 0 in $x = 0$. È

$$f'(x) = \frac{e^x(e^{2x} - 2e^x - 1)}{(e^{2x} + 1)^2}$$

In $x = 0$ la derivata vale -1 e quindi la tangente al grafico è la retta $y = -x$. Per cercare gli zeri della derivata si pone $e^x = t$ e ci si trova a dover vedere quando si annulla il trinomio $t^2 - 2t - 1$ (gli altri fattori non si annullano). Il trinomio si annulla per $t = 1 \pm \sqrt{2}$, ma, data la posizione, soltanto il valore $t = 1 + \sqrt{2}$ è ammissibile e fornisce $x = \lg(1 + \sqrt{2})$ che, come c'era da aspettarsi, è > 0. Sul semiasse delle $x > 0$ la derivata passa da -1 in $x = 0$ a

0 nel punto di minimo per poi tornare ad avere limite 0 per $x \to +\infty$: ci sarà quindi un flesso dopo $x = \lg(1+\sqrt{2})$. Per gli x negativi la derivata non si annulla mai, tende a 0 per $x \to -\infty$, e vale -1 in $x = 0$. Non necessariamente ci sono dei flessi (e infatti non ci sono).
b) Della funzione calcolata in a) trovare la primitiva che vale 0 nel punto 0.
Sol. - Le primitive si ottengono ponendo $e^x = t$, da cui $x = \lg t$, $dx = \frac{1}{t}\ dt$. Si ha perciò $\int \frac{1-e^x}{e^{2x}+1}\ dx = \int \frac{1-t}{t^2+1}\ dt = \arctan t - \frac{1}{2}\lg(t^2+1) + c$ da cui, tornando alla posizione, $\arctan e^x - \frac{1}{2}\lg(e^{2x}+1) + c$. La condizione fornisce $\arctan 1 - \frac{1}{2}\lg 2 + c = 0$ da cui $c = -\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\lg 2$.
c) Dire se l'integrale $\int_0^t \frac{1-e^x}{e^{2x}+1}\ dx$ ha limite finito per $t \to \infty$.
Sol. - Le cose sono diverse se $t \to +\infty$ oppure $t \to -\infty$. Nel primo caso la risposta è affermativa perché per $x \to +\infty$ l'integranda va a 0 di ordine superiore a tutte le potenze di $\frac{1}{x}$, e quindi ad esempio di $\frac{1}{x^2}$, che ha integrale finito. Nel secondo caso invece l'integranda tende a 1, e quindi certamente non è finita l'area della zona compresa tra l'asse x e il grafico della f.
d) Calcolare

$$\int_0^k xe^{-\frac{x^2}{2}}\ dx$$

e quindi dire se esiste finito il limite per $k \to +\infty$, e, in caso affermativo, quanto vale.
Sol. - Posto $\frac{x^2}{2} = t$ si ha $xdx = dt$ per cui basta calcolare le primitive di e^{-t} che sono $-e^{-t} + c = -e^{-\frac{x^2}{2}} + c$. (In particolare la primitiva scritta come $f(k) = \int_0^k xe^{-\frac{x^2}{2}}\ dx$ è quella che si annulla per $k = 0$ e quindi corrisponde al valore $c = 1$.) Poiché la funzione integranda per $x \to +\infty$ va a 0 di ordine superiore a qualsiasi potenza della x, in particolare alla seconda, che ha integrale finito, la funzione ha integrale finito per $k \to +\infty$.

3. a) Si dia la definizione di "funzione semplice" e si illustri in quale ambito è stata usata.
Sol. - Vd. 3.3.
b) L'area compresa tra il semiasse delle x per $x > 1$ e il grafico della funzione

$$f(x) = \frac{x + e^{-x}}{x^2 + \lg x}$$

è finita? (Sugg.: si guardi di che ordine sono gli infiniti al numeratore e denominatore...)
Sol. - Gli infinitesimi sono del primo e del secondo rispettivamente, pertanto il quoziente è un infinitesimo del primo ordine; l'area *non* è finita.
c) Si studi, al variare del parametro a, la funzione $f(x) = |x|^a \lg|x|$ esplorandone anche la prolungabilità e l'eventuale derivabilità nello 0.
Sol. - Sono funzioni pari. Vd. file M158sett.pdf, dove sono presentate le funzioni del tipo $x^k \lg x$; quelle richieste si ottengono aggiungendo al grafico il suo simmetrico rispetto all'asse y.

4. a) Data la funzione $f(x) = \lg_{1/2}|x|$, si disegnino le due funzioni f^+ ed f^-.
Sol. - La funzione $f(x) = \lg_{1/2}|x|$ si ottiene ribaltando per simmetria rispetto all'asse y il grafico di $g(x) = \lg_{1/2} x$, che è una funzione definita per $x > 0$, decrescente da $+\infty$ a $-\infty$ e che si annulla in $x = 1$. La f^+ si

ottiene lasciando inalterate le parti positive del grafico di f e ponendo 0 dove la f è negativa; la f^- si ottiene ribaltando le parti negative rispetto all'asse x e ponendo 0 dove la f è positiva.
b) Le due funzioni in a) sono infinitesime per $x \to 1$?
Sol. - Sono infinitesime per $x \to 1$ (e anche per $x \to -1$). Se si volessero fare considerazioni sull'ordine (qui non richieste), si noterebbe che i limiti del rapporto con $|x \pm 1|$ sono 0 da destra e 1 da sinistra o viceversa, e quindi non c'è un limite finito e diverso da 0. Si potrebbe dire che dalla parte in cui il limite è 1 sono infinitesime del 1^o ordine, e dalla parte in cui le funzioni sono sempre nulle ha scarso senso parlare di ordine.

5. a) La funzione
$$f(x) = x^2 \cos \frac{1}{x^2}$$
non è definita per $x = 0$. È prolungabile per continuità in quel punto? In che modo? Si giustifichino le risposte.
Sol. - È prolungabile ponendo $f(0) = \lim_{x \to 0} f(x) = 0$. Il limite è nullo, in quanto si tratta del prodotto di un infinitesimo per una funzione limitata.
b) Si scriva la formula di MacLaurin della funzione $f(x) = \lg(1+x)$ arrestata al termine che contiene la derivata terza, e si indichi una maggiorazione dell'errore commesso se si considera il polinomio di MacLaurin al posto delle funzione.
Sol. - Vd. p. 196, caso g): $\lg(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3)$; arrestandosi al termine con x^3 quello che si trascura è in modulo minore di $\frac{1}{3}$.
c) Si scriva la formula di MacLaurin della funzione $f(x) = \tan x$ arrestata al termine che contiene la derivata terza, e si indichi una maggiorazione dell'errore commesso se si considera il polinomio di MacLaurin al posto della funzione.
Sol. - Vd. p. 196, caso f): $\tan x = x + \frac{x^3}{3} + o(x^3)$; l'errore commesso è maggiorato in modulo da $\frac{1}{3}$. (Nel libro il resto è scritto sotto la forma $o(x^4)$ perché lì si è già tenuto presente che il termine di quarto grado è nullo.)
d) Quale è il polinomio di quinto grado che meglio approssima la funzione $x - \sin x$ in un intorno dello 0?
Sol. - Vd. p. 196, caso b); risulta $x - \sin x = \frac{x^3}{3!} - \frac{x^5}{5!} + o(x^5)$ per cui il polinomio cercato è $P(x) = \frac{x^3}{3!} - \frac{x^5}{5!}$.

6. a) Studiare la funzione
$$f(x) = \arctan \frac{1}{1-x^2}$$
(insieme di definizione, segno, continuità, derivabilità, attacchi, crescenza, decrescenza, massimi, minimi, eventuali asintoti verticali, obliqui o orizzontali). Giustificare le risposte.
Sol. - La funzione è pari, non è definita per $x = \pm 1$, è negativa per $|x| > 1$, è positiva per $|x| < 1$. Ha limite $-\pi/2$ per $x \to -1^-$ e $x \to 1+$, ha limite $+\pi/2$ per $x \to -1^+$ e per $x \to 1^-$, è decrescente negli intervalli $(-\infty, -1]$ e $]1, 0]$ (ma *non* da $-\infty$ a 0!), ha minimo in $x = 0$ che vale $\arctan 1 = \pi/4$, è crescente negli intervalli $[0, 1[$ e $]1, +\infty)$ (ma *non* da 0 a $+\infty$!), ha asintoto orizzontale sia destro che sinistro $y = 0$. Gli attacchi nei punti di discontinuità portano una derivata che vale -2 in -1 (sia da destra che da sinistra) e

+2 in 1 (sia da destra che da sinistra). Attenzione: in $x = \pm 1$ *non* c'è derivabilità, perché non c'è la continuità! L'uguaglianza dei coefficienti angolari delle (semi)tangenti dice solo che queste sono parallele.
b) Studiare la funzione $f(x) = x \lg^2 x$ (continuità, eventuale prolungamento per continuità, attacchi, grafico). Calcolarne poi l'integrale tra 1 e 2. Esiste finito il suo integrale tra 0 e 1? Perché?
Sol. - Definita per $x > 0$. Ha limite 0 per $x \to 0^-$ e $+\infty$ per $x \to +\infty$, vale 0 in $x = 1$, per gli altri x è sempre positiva. Continua sul suo insieme di definizione, prolungabile in 0 ponendo $f(0) = 0$. È $f'(x) = \lg^2 x + 2x \lg x$: è un infinito più un infinitesimo e quindi la derivata va a $+\infty$ per $x \to 0^+$: la (semi)tangente coincide con l'asse delle y. È $f'(x) = 0 \Rightarrow \lg x = 0 \Rightarrow x = 1$; l'altro fattore $\lg x + 2x$ si annulla in un punto compreso tra 0 e 1 (si vede intersecando i grafici di $g_1 = \lg x$ e $g_2 = -2x$). In tale punto si ha un massimo relativo, in $x = 1$ si ha un minimo anche assoluto. Tra il punto di massimo e quello di minimo c'è un punto di flesso. Non vi è asintoto obliquo, dato che $lim_{x\to+\infty} f'(x) = +\infty$. Il suo integrale tra 0 e 1 esiste finito perché abbiamo prolungato per continuità ed abbiamo ottenuto quindi una funzione continua su un intervallo limitato.
c) Studiare la funzione $f(x) = x \arctan x$ (trovarne minimi e massimi, l'eventuale asintoto, studiare il tipo di infinitesimo in un intorno di 0, grafico)
Sol. - Funzione pari, definita su tutto $\mathbb{R}$, vale 0 in $x = 0$, positiva altrove, quindi in $x = 0$ ha un minimo. In un intorno di $x = 0$ si comporta come x^2 (lo sviluppo di MacLaurin dell'arcotangente ha come primo termine x). Studiamola solo per $x > 0$, il resto del grafico si ottiene come simmetrico rispetto all'asse delle y. Ha asintoto obliquo $y = ax + b$, di coefficiente angolare $a = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(z)}{x} = \frac{\pi}{2}$; per trovare b si ha $b = \lim_{x\to+\infty} f(x) - \frac{\pi}{2}x = \lim_{x\to+\infty} x \arctan x - \frac{\pi}{2}x = \lim_{x\to+\infty} x\big(\arctan x - \frac{\pi}{2}\big)$. Si tratta di un caso del tipo $+\infty - \infty$ trasformato in un caso $0 \cdot \infty$. Lo trasformiamo in un caso $\frac{0}{0}$ per poi applicare la regola di L'Hospital:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\arctan x - \frac{\pi}{2}}{\frac{1}{x}} = (H) = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{1}{1+x^2}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to+\infty} -\frac{x^2}{1+x^2} = -1.$$

L'asintoto è dunque $y = \frac{\pi}{2}x - 1$. La funzione approssima l'asintoto venendogli da sopra, la derivata seconda è $f''(x) = \frac{2}{(1+x^2)^2}$, sempre > 0, non vi sono flessi (il grafico assomiglia ad un ramo di iperbole racchiuso tra i due semiasintoti $y = \frac{\pi}{2}x - 1$ e $y = -\frac{\pi}{2}x - 1$.
d) Studiare la funzione $f(x) = \frac{e^{-x^2}}{1+x^2}$.
Sol. - Funzione pari, che vale 1 per $x = 0$; la derivata ha denominatore sempre positivo e numeratore $2xe^{-x^2}(-2 - x^2)$ che si annulla in $x = 0$ ed è negativa per $x > 0$: quindi massimo in 0, crescente per gli x negativi, decrescente per gli x positivi; la f tende a 0 per $x \to \infty$; la f' del pari; ci sono quindi due flessi in due punti simmetrici rispetto all'asse delle y.

7. a) Calcolare

$$\lim_{x\to 0} \frac{1 - \cos 2x}{e^{3x} - 1 - 3x}$$

Sol. - $\frac{4}{9}$ (due volte regola dell'Hospital; si tratta di due infinitesimi del secondo ordine).

b) Calcolare $\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}$.
Sol. - Tipo 1^∞ che si risolve scrivendo $e^{\frac{\lg(1+x)}{x}}$. Consideriamo l'esponente, che è del tipo $\frac{0}{0}$. Se non ci si accorge subito che sono infinitesimi entrambi del primo ordine, entrambi con parte principale x, e quindi il limite è il rapporto dei coefficienti delle parti principali, e quindi 1, allora si applica l'Hospital una volta e risulta $\lim_{x\to 0}\frac{1}{1+x} = 1$. Pertanto il limite complessivo è $e^1 = e$.
c) Studiare le due funzioni

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \qquad \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

che prendono il nome, rispettivamente, di *seno iperbolico* e *coseno iperbolico*. Studiare quindi la funzione che si ottiene dividendo la prima per la seconda, e che prende il nome di *tangente iperbolica*.
Sol. - Il seno iperbolico è dispari, positiva per gli $x > 0$ e negativa per gli $x < 0$, sempre crescente da $-\infty$ a $+\infty$, con derivata $=1$ nello 0; la sua derivata è proprio il coseno iperbolico. La sua derivata seconda (che è nuovamente il seno iperbolico) si annulla nello 0, dove c'è un flesso. Il grafico assomiglia a quello dell'arcoseno, a parte il fatto che è definito su tutta la retta e va a $\mp\infty$ rispettivamente per $x \to \mp\infty$. Il coseno iperbolico è pari, è sempre positivo, ha minimo in $x = 0$ dove vale 1, e la sua derivata è il seno iperbolico (il suo grafico è una curva che si dice *catenaria* e che descrive la configurazione di una catena pesante tenuta agli estremi); va a $+\infty$ per $x \to \pm\infty$. La tangente iperbolica è dispari, ha un andamento simile all'arcotangente, salvo il fatto che tende a ∓ 1 per $x \to \mp\infty$ rispettivamente.
d) Si scrivano gli sviluppi di MacLaurin (cioè di Taylor nel punto 0) delle prime due funzioni del caso c).
Sol. - Il calcolo delle derivate nel punto $x = 0$ porta a sviluppi che sono come quelli del seno e del coseno rispettivamente, solo che hanno tutti i coefficienti col segno $+$ invece che a segni alterni.

8. a) Se una funzione f è derivabile, la sua f^- è derivabile anch'essa? Giustificare la risposta con un ragionamento o eventualmente con un controesempio.
Sol. - No, ad esempio $\sin x$ nei punti in cui cambia segno.
b) In quale contesto si sono incontrate le funzioni f^+ ed f^-, per quale definizione sono state usate e come?
Sol. - Vd. pp. 97-98.

9. Si dia la definizione di *parte principale* e *parte complementare* di un infinitesimo. Si scrivano quindi le parti principali degli infinitesimi per $x \to 0$

$$f_1(x) = x - \sin x \cos x;\ f_2(x) = \tan x - \sin x^2;\ f_3(x) = 1 - \cos x - \frac{x^2}{2} + \sin x - x$$

Sol. - In un infinitesimo $f(x)$ di ordine k è $\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{(x-x_0)^k} = \ell \neq 0$ e finito. La *parte principale* di f è $\ell(x - x_0)$; la *parte complementare* è la rimanente, cioè $f(x) - \ell(x - x_0)$.
Lo sviluppo di MacLaurin di f_1 è:

$$f_1(x) = x - (x - \frac{x^3}{3!} + o_1(x^3))(1 - \frac{x^2}{2!} + o_2(x^2)) = \frac{2}{3}x^3 + o_3(x^3)$$

e quindi la sua parte principale è $\frac{2}{3}x^3$. Di f_2 si vede subito che $\tan x$ è del primo ordine, con parte principale x, mentre $\sin x^2$ è del secondo (con parte principale x^2, ma non ci serve), e quindi la parte principale dell'intero infinitesimo è x. Di f_3 notiamo che $1 - \cos x$ è un infinitesimo del secondo ordine, il cui sviluppo di MacLaurin è $\frac{x^2}{2!} - \frac{x^4}{4!} + o(x^4)$; pertanto i termini $1 - \cos x - \frac{x^2}{2}$ costituiscono un infinitesimo del 4^o ordine (con parte principale $-\frac{x^4}{4!}$, ma non ci servirà). A loro volta i termini $\sin x - x$ costituiscono un infinitesimo del 3^o ordine, con parte principale $-\frac{x^3}{3!}$; l'infinitesimo complessivo è quindi del 3^o ordine, con parte principale $-\frac{x^3}{3!}$.

10. Enunciare i teoremi di Rolle, di Lagrange e degli incrementi finiti (o di Cauchy).
    Sol. - Il teor. di Lagrange è a p. 79; va sotto il nome di teor. di Rolle quanto è scritto nelle ultime quattro righe della medesima pagina. Il teor. di Cauchy (o degli incrementi finiti) è a p. 186.