

## MATEMATICA I

Corsi di Laurea in Ingegneria Elettrotecnica e in Ingegneria Energetica  
Esercitazione in classe del 2.11.2005                      Tempo concesso: 90 minuti

Vengono proposti 4 esercizi per ogni tipo. Nella prova parziale ne verrà proposto uno solo. Gli altri sono al fine di esercitarsi.

1. a) Si dica cosa significa  $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = +\infty$  e si faccia un grafico di una funzione che goda di questa proprietà (eventualmente se ne scriva anche l'equazione).
- b) Si dica cosa significa  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$  e si faccia un grafico di una funzione che goda di questa proprietà.
- c) Si dica cosa significa  $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = -2$  e si faccia un grafico di una funzione che goda di questa proprietà.
- d) Si dica cosa significa  $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = +\infty$  e si faccia un grafico di una funzione che goda di questa proprietà.
  
2. a) Si dia la definizione di continuità di una funzione  $f$  in un punto  $x_0$ . In che modo essa è legata all'esistenza di  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ ?
- b) Se una funzione ha limite  $\ell$  finito per  $x \rightarrow x_0$ , essa è limitata in un intorno di  $x_0$ ? Se sì, dire perché; se no, trovare un controesempio.
- c) Sia  $f$  definita in un intervallo contenente al suo interno il numero 3. Se per gli  $x$  tali che  $0 < |x - 3| < \delta$  con un certo  $\delta$  opportuno succede che  $|f(x) - 10| < 5$ , la funzione  $f$  ha limite 10 per  $x \rightarrow 3$ ? Si giustifichi la risposta, scrivendo eventualmente delle disuguaglianze opportune, o fornendo un controesempio.
- d) Sia  $f$  come nel caso c); la funzione è limitata in un intorno di 3? Si giustifichi la risposta, scrivendo eventualmente delle disuguaglianze opportune o fornendo un controesempio.
  
3. a) Il limite della somma è sempre uguale alla somma dei limiti, quando questi esistono e sono finiti entrambi? E viceversa, se esiste il limite per  $x \rightarrow x_0$  di una somma di due funzioni  $f_1$  ed  $f_2$ , esistono i limiti dei singoli addendi per  $x \rightarrow x_0$ ? Giustificare tutte le risposte.
- b) Il limite del prodotto è sempre uguale al prodotto dei limiti, quando questi esistono e sono finiti entrambi? E viceversa, se esiste il limite per  $x \rightarrow x_0$  del prodotto di due funzioni  $f_1$  ed  $f_2$ , esistono i limiti dei singoli fattori per  $x \rightarrow x_0$ ? Giustificare tutte le risposte, eventualmente con controesempi.
- c) Sia  $f_1$  una funzione limitata in un intorno di  $x_0$  ed  $f_2$  una funzione che tende a  $+\infty$  per  $x \rightarrow x_0$ . Il prodotto  $f_1 \cdot f_2$  tende a  $+\infty$  per  $x \rightarrow x_0$ ? Se sì si dica perché, eventualmente citando un teorema, se no si trovi un controesempio.
- d) Sia  $f(x)$  un infinitesimo del secondo ordine per  $x \rightarrow 2$ . Chi è

l'infinitesimo standard che si sceglie per confronto? Esiste, e, se sì, quanto vale,  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) \cdot e^{\sin(x-2)}$ ? Si giustifichi la risposta.

4. a) Si faccia un pezzo di grafico di una funzione che sia per  $x \rightarrow x_0$ , rispettivamente, un infinitesimo di ordine 1, un infinitesimo di ordine inferiore a 1, un infinitesimo di ordine superiore a 1.  
 b) Si calcoli  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{x}$  e se ne faccia un abbozzo del grafico in un intorno dello 0.  
 c) Si enunci il teor. del confronto (o dei carabinieri) e si faccia un esempio in cui tale teorema viene utilizzato.  
 d) La funzione  $\sqrt{\lg(\tan x)}$  è limitata? Se ne trovi l'insieme di definizione e l'immagine (o codominio).
5. a) Si dia la definizione di funzione composta e si trovi un esempio in cui la composizione di due funzioni non è commutativa, cioè  $f \circ g \neq g \circ f$ .  
 b) Si dica quali sono gli insiemi di definizione e le immagini delle funzioni  $f_1(x) = \arccos x$  e  $f_2(x) = \arcsin x$ .  
 c) Si dica quali sono l'insieme di definizione e gli estremi superiore ed inferiore della funzione  $\lg \sqrt{x^2 - 1}$ .  
 d) Se  $f$  è una funzione definita e limitata su tutto  $\mathbb{R}$ , e invece  $g$  è una funzione definita ma non limitata su tutto  $\mathbb{R}$ , la funzione  $f \circ g$  è limitata su tutto  $\mathbb{R}$ ? Se sì dire perché, se no trovare un controesempio.
6. a) Si enunci il teor. di Weierstrass e si trovino degli esempi per i quali, se non è soddisfatta una delle ipotesi, non è soddisfatta neanche la tesi.  
 b) Si enunci il teorema che per una funzione derivabile in un punto di massimo o minimo interno dice quanto vale la derivata. Si espongano poi dei casi in cui la tesi di quel teorema non è verificata per la mancanza di una o un'altra ipotesi.  
 c) Data una funzione  $f$  derivabile in un intervallo contenente il punto  $x = 3$ , sia  $f(3) = 2$ ,  $f'(3) = -4$ . Si scriva l'equazione della retta tangente al grafico della funzione nel punto  $(3, 2)$ .  
 d) Si enunci il teor. di Lagrange e si presenti una sua interpretazione grafica.
7. a) Si studi la funzione  $x^2(\sin x + 3)$  (insieme di definizione, eventuale parità o disparità, eventuale periodicità, limiti per  $x \rightarrow +\infty$  e per  $x \rightarrow -\infty$ , crescenza, derivata, abbozzo qualitativo del grafico).  
 b) Come in a) per la funzione  $x \sin x$ . Per  $x \rightarrow 0$  è infinitesima? Di che ordine? Giustificare le risposte.  
 c) Come in a) per la funzione  $f(x) = x + \sin x$ . Ci sono infiniti valori in cui la derivata si annulla; sono punti di massimo o minimo? (Ricordare il corollario del teor. di Lagrange...)  
 d) Come in a) per la funzione  $f(x) = \lg(\sin x + 10)$ .

8. a) La funzione  $\frac{\sin x}{x} + \frac{1}{x}$  ha limite (finito) per  $x \rightarrow 0$ ? Se sì, quanto vale? E ha limite (finito) per  $x \rightarrow -\infty$ ? Se sì, quanto vale? Si giustifichino le risposte.
- b) La funzione  $\frac{\tan x}{x} + \frac{1}{x}$  ha limite (finito) per  $x \rightarrow 0$ ? Se sì, quanto vale? E ha limite (finito) per  $x \rightarrow -\infty$ ? Se sì, quanto vale? Si giustifichino le risposte.
- c) La funzione  $\frac{\arctan x}{x} + \frac{1}{x}$  ha limite (finito) per  $x \rightarrow 0$ ? Se sì, quanto vale? E ha limite (finito) per  $x \rightarrow -\infty$ ? Se sì, quanto vale? Si giustifichino le risposte.
- d) La funzione  $\frac{\arcsin x}{x} - \frac{1}{x}$  ha limite (finito) per  $x \rightarrow 0$ ? Se sì, quanto vale? E ha senso chiedersi se ha limite (finito) per  $x \rightarrow -\infty$ ? Se sì, quanto vale? Si giustifichino le risposte.
9. a)  $f$  è un infinitesimo del 2° ordine e  $g$  è un infinitesimo del 1° ordine per  $x \rightarrow x_0$ . Le funzioni  $f + g$  ed  $f \cdot g$  sono anch'esse infinitesime? Se sì, di che ordine, rispettivamente?
- b)  $f$  è un infinito del 2° ordine e  $g$  è un infinito del 1° ordine per  $x \rightarrow x_0$ . Le funzioni  $f + g$  ed  $f \cdot g$  sono anch'esse degli infiniti? Se sì, di che ordine, rispettivamente?
- c) Dare degli esempi in cui  $f$  e  $g$  sono infiniti entrambi del primo ordine per  $x \rightarrow +\infty$ , e una volta il limite per  $x \rightarrow +\infty$  di  $f + g$  risulta  $+\infty$ , una volta 0, una volta  $-\infty$ .
- d) Qual è il limite per  $x \rightarrow 0^+$  di  $f(x) = x^\alpha \lg x$  con  $\alpha$  reale e positivo?
10. a) Si dia la definizione di maggiorante. Un insieme superiormente limitato ha sempre maggioranti? Ha sempre estremo superiore finito?
- b) Si dia la definizione di maggiorante. Un insieme inferiormente limitato ha sempre maggioranti? Ha sempre estremo superiore finito?
- c) Si dia la definizione di minorante. Un insieme superiormente limitato ha sempre minoranti? Ha sempre estremo inferiore finito?
- d) Si dia la definizione di minorante. Un insieme inferiormente limitato ha sempre minoranti? Ha sempre estremo inferiore finito?