M162sett.tex

Inizio 2006/10/9

Capitolo II pp. 33-63

Concetto di funzione: $f : A \longrightarrow B$ è una legge che associa ad ogni elemento di un insieme A un elemento (ed uno solo) di un insieme B. A si dice *insieme di definizione* o *dominio*, mentre B si dice *codominio*.

Esempi, anche non numerici.

Immagine non necessariamente coincidente con il codominio, ma certe eùn suo sottoinsieme.

Il dominio di $f(x) = x^2 + x^4$ è tutto $\mathbb{R}$, l'immagine è $\mathbb{R}_0^+$. È da notare che quando ci si avicina allo 0 la funzione si comporta come x^2, mentre quando $|x|$ diventa grande la funzione si comporta come x^4.

Grafico: sottoinsieme dello spazio prodotto, insieme delle copie $(x, f(x))$.

Grafico per punti (solo presi dalla disperazione). Il grafico di una funzione non è mai tagliato in più di un punto dalle parallele all'asse delle ordinate.

Rette, coefficiente angolare e suo segno: $y = mx + q$ una retta per un punto:

$$y - y_0 = m(x - x_0)$$

Trovare chi è q.

Retta per due punti distinti (x_0, y_0) e (x_1, y_1):

$$\frac{y - y_0}{y_1 - y_0} = \frac{x - x_0}{x_1 - x_0}$$

Scoprire che è

$$m = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}$$

Funzioni combinate (composte); modulo, funzione segno (non definita in 0).

Si noti che $|a| < |b|$ è equivalente ad $a^2 < b^2$ (cioè se e vera la prima è vera la seconda e viceversa), ma <u>n</u>on implica $a < b$, prendiamo $a = 1$, $b = -2$.

Funzioni pari, funzioni dispari, simmetrie del grafico. Parità dele potenze pari, disparità delle potenze dispari.

Pari per pari fa pari, dispari per pari fa dispari, dispari per dispari fa pari.

Verificare che

$$f(x) = |x|\Big(x + \frac{1}{x^3}\Big)$$

è dispari.

Grafico dell'esponenziale di tipo $f(x) = a^x$ a seconda se $a \lesseqgtr 1$. Nota sull'esponenziale e sulla sua rapidità di crescita, e anche sulla sua rapidità di diminuzione per x che diventa grande. Proprietà essenziale: la positività (pp. 35-36).

Osservazione sulla diversità di scrittura

$$f(x) = x^2 + 2x \qquad y = x^2 + 2x$$

La prima indica la funzione, la seconda indica il grafico come insieme di punti dello spazio prodotto.

Funzioni monotone: crescenti, decrescenti, in senso stretto, in senso lato.

Iperbole $y = \frac{k}{x}$; il grafico occupa il I e III quadrante, oppure il II e IV, a seconda se il k è positivo o negativo. Diversità del grafico (più o meno stretto) a seconda dei valori di k.

Funzione iniettiva: $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$.
Esempi con funzioni definite anche su insiemi che non sono intervalli, o con funzioni non continue su un intervallo. Esempio: iperbole, radice quadrata, monomi dispari, monomi pari soltanto se guardati su una semiretta (positiva o negativa).

Funzione inversa di una funzione f (*da non confondersi con la funzione che scambia il numeratore col denominatore*): esiste solo se la f è iniettiva, e viene indicata con f^{-1}:

$$f : A \longrightarrow B \qquad f^{-1} : B \longrightarrow A$$

L'insieme di definizione è scambiato con l'immagine, e il grafico è simmetrico rispetto alla bisettrice del I e III quadrante.

0.0.1 TEOREMA. *Ogni funzione strettamente monotona è invertibile.*

Non è vero il viceversa (vd. iperbole)

Il logaritmo visto come l'inversa dell'esponenziale, in base maggiore o minore di 1.
La crescenza e decrescenza della f si mantengono nella f^{-1}.
La parabola è invertibile soltanto nei suoi tratti di monotonia. L'inversa del tratto sull'asse delle x con $x > 0$ è $g(x) = \sqrt{x}$, l'inversa del tratto con $x < 0$ è $g(x) = -\sqrt{x}$.

L'inversa dell'inversa è la funzione di partenza. (p. 41)

Proprietà dei logaritmi: $\lg x^a = a \cdot \lg |x|$.
Il modulo lo si può omettere soltanto se $x > 0$. Ricordiamo che x^a è sempre definito se $a \in \mathbb{Z}$, per $a \in \mathbb{R}$ è definito solo per $x \geq 0$.

Ricordiamo le identità $y = e^{\lg y}$, $y = a^{\lg_a y}$, $\lg_a x = \frac{\lg_e x}{\lg_e a}$.
Non ha senso scrivere un logaritmo in base 1, perché nessuna potenza di 1 dà un numero diverso da 1.

Funzioni trigonometriche.

Funzioni riconducibili alle funzioni elementari. Traslazioni secondo l'asse delle x, secondo quello delle y. Moduli in genere, moduli di polinomi di secondo grado. Funzioni trigonometriche con periodo diverso ($\sin 3x$, $cos\frac{x}{4}$).

Funzioni inverse delle funzioni trigonometriche e intervalli in cui si considera l'inversa. Attenzione all'insieme di definizione di tali funzioni.

Confronto di grafici, disequazioni con il modulo: $|x| \leq 4$, $|x| \geq 4$.

Massimi e minimi di una funzione; punti di massimo e di minimo. *Non tutti gli insiemi* hanno massimo: esempi e controesempi.

Insiemi limitati ed illimitati; funzioni limitate e illimitate. Alcuni esempi.

Ricordiamo che il logaritmo esiste soltanto per $x > 0$. Ricordiamo anche $\lg xw = \lg x + \lg w, \quad \lg\frac{1}{x} = -\lg x$, sempreché entrambi i membri abbiano significato; ricordiamo anche $\lg x^a = a \cdot \lg|x|$

Funzioni periodiche e definizione del periodo T come il più piccolo degli intervalli per i quali $f(x + T) = f(x)$.

Notiamo che il periodo di $\sin x$ e di $\cos x$ è 2π, mentre il periodo di $\operatorname{tg} x$ è π.
Notiamo ancora che $\sin 2x$ ha periodo metà del periodo di $\sin x$; in genere, se T è il periodo della funzione f, allora $\frac{T}{a}$ è il periodo della funzione $g = f(ax)$; il periodo di $\cos nx$ è $\frac{2\pi}{n}$.

Si dice *successione* una funzione definita su $\mathbb{N}$, ad esempio $\frac{1}{n}$, a^n.

Limiti (pp. 64 e segg.)

Esempio del raffreddamento: la temperatura si avvicina allo 0 ma non lo assume mai.
Altro esempio: la tangente ad una circonferenza per l'arco che si avvicina a $\frac{\pi}{2}$ diventa sempre più grande.

Attenzione: una cosa è essere illimitata per una funzione, altra è diventare sempre più grande. Esempio $f(x) = x \sin x$ è illimitata ma non tende all'infinito.

x_0 si dice **Punto di accumulazione** per l'insieme I contenuto in $\mathbb{R}$ se fissato un numero reale $\delta > 0$ si può trovare in I un punto x diverso da x_0 che dista da x_0 meno di δ, cioè tale che

$$|x - x_0| < \delta, \text{oppure, equivalentemente} x_0 - \delta < x < x_0 + \delta.$$

Esempi: $\{\frac{1}{n}\}$ ha 0 come punto di accumulazione, un estremo di un intervallo è di accumulazione per l'intervallo; un punto interno all'intervallo, del pari.

Un punto che non è di accumulazione si dice *isolato.*

Definizione:

si dice che una funzione $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, definita su un insieme I che ha x_0 come punto di accumulazione, ha limite finito l per $x \longrightarrow x_0$ se

$$\forall \epsilon > 0 \, \exists \delta :$$

$$\forall x : |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - \ell| < \epsilon.$$

Notiamo che ϵ è arbitrario, mentre δ dipende da ϵ. Però una volta trovato un δ, tutti quelli più piccoli vanno bene Notiamo anche che non interessa sapere cosa succede nel punto x_0.

Esempio con la figura: $\lim_{x \to 2} x^2 = 4$.

Funzioni costanti.

Funzione $f(x) = x$ (si vede subito che in questo caso $\delta = \epsilon$ per tutti i punti).

Una funzione che ha limite 0 per $x \to x_0$ si dice *infinitesimo* per $x \to x_0$.

Un infinitesimo per una funzione limitata è ancora un infinitesimo.

Limite destro e limite sinistro e funzioni prive di limite (Esempio: $\sin \frac{1}{x}$, pp. 73-76).

Limite $+\infty$ per $x \to x_0$; del pari limite $-\infty$ per $x \to x_0$.

Esempi: $\lg x, |\lg |x||, -\frac{1}{x^2}, -\frac{1}{x-2}, -\frac{1}{(x-2)^2}, \operatorname{tg} x$

Limite finito e infinito all'infinito, sia a $+\infty$ che a $-\infty$.

$\arctan x, \operatorname{tg} x$ che non ha limite, $\cos x$ che non ha limite, $x \sin x$ (vicino allo 0 ha un infinitesimo doppio, all'infinito non ha limite, ma è illimitata.

Teoremi sui limiti: unicità del limite e teorema della permanenza del segno (con accenno di dimostrazione).

Teorema del confronto (o dei carabinieri), prime regole di calcolo. (pp. 76-86)