M163sett.tex

3a settimana

Inizio: 2006/10/16

Teoremi sui limiti (§3.7, p. 82)

Teorema sull'unicità del limite (con dim.)

Teorema della permanenza del segno (con dim.)

Attenzione: se il limite è 0, nulla si può dire (vd. $x \sin \frac{1}{x}$)

Teorema del confronto o dei carabinieri

Ne abbiamo visto un esempio con $x \sin \frac{1}{x}$ per $x \to 0$ prendendo come f e g rispettivamente $|x|$ e $-|x|$; un altro potrebbe essere $x^2 \sin \frac{1}{x}$. Un altro: $x + \sin x$ per $x \to +\infty$, che risulta sempre compresa tra $x - 1$ e $x + 1$.

Operazioni sui limiti.

Limite della somma = somma dei limiti (se finiti; se uno è infinito con un certo segno il limite è infinito con quel segno).

Se sono entrambi infiniti dello stesso segno, il limite è infinito con quel segno.

Resta fuori $+\infty - \infty$ (forma indeterminata).

Limite del prodotto = prodotto dei limiti (se finiti, o se uno finito e diverso da 0, e l'altro infinito). Vale la regola dei segni.

Resta fuori $\infty \cdot 0$.

Il limite del reciproco è uguale al reciproco del limite; se il limite del denominatore è 0, bisogna guardare il segno a destra e a sinistra.

Es.: $\frac{1}{x}$, $\frac{1}{x^2}$, $\frac{1}{\arctan x}$.

Restano fuori $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$.

Casi diversi con polinomi di grado diverso per $x \to \infty$ o monomi per $x \to 0$.

Attenzione:

$$\lim_{x \to 0^+} \left(x \sin \frac{1}{x} \right) \cdot \frac{1}{x} = \lim_{x \to 0^+} \sin \frac{1}{x}$$

che non esiste.

Vediamo $x - \sqrt{x}$ per $x \to +\infty$ è del tipo $+\infty - \infty$, però mettendo in evidenza $\sqrt{x}$ si ha un prodotto di infiniti e quindi va a $+\infty$.

Limiti di funzioni razionali per $x \to \infty$: la potenza di grado maggiore trascina tutto al proprio limite.

Se gli esponenti di numeratore e denominatore sono uguali, si divide per il monomio di grado massimo, e risulta il limite del rapporto tra i coefficienti.

Limite di funzioni monotone: esiste sempre il limite destro e il limite sinistro (possono non essere uguali). Per $x \to \infty$ il limite esiste sempre.

Limite per successioni (qui non si richiede che la f sia definita su una semiretta); il dominio di definizione delle successioni è $\mathbb{N}$ e quindi ha solo senso il limite per $n \to +\infty$.

Ripetiamo la definizione, questa volta usando ν (definizione 36, pp. 93-94).
Successione convergente: esempi

$$\{\frac{1}{n}\} \to 0, \quad \{\frac{n-1}{n}\} \to 1, \quad \{\frac{n+1}{n}\} \to 1, \quad \{\arctan n\} \to \frac{\pi}{2}, \quad \{\sin\frac{1}{n}\} \to 0$$

(attenzione: non confondere quest'ultima con $\sin\frac{1}{x}$ per $x \to 0$!!!)

Successione divergente; esempi $\{n\} \to +\infty, \quad \{e^n\}$.

Successione indeterminata; esempio: $\{(-1)^n\}$.

Successioni monotone: mai indeterminate (teor. 37, p. 95).

Concetto di *intorno* di un punto al finito: intervallo aperto contenente il punto; *intorno* di $+\infty$ o di $-\infty$ è una semiretta, rispettivamente crescente o decrescente.
Tutte le definizioni di limite si possono ripetere utilizzando questo nuovo concetto: fissato un intorno V di ℓ, si può trovare un intorno U di x_0 o di $\pm\infty$ tale che $x \in U \Rightarrow f(x) \in V$ (p. 95).

Ripresa delle definizione di **funzione continua** in un punto x_0.

Definizione di **funzione discontinua** in un punto.

Definizione di *salto*: $f(x_{0+}) - f(x_{0-})$. Esempio: $sgn\ x$.

Richiamare la definizione di *prolungamento per continuità*.

Continuità delle funzioni elementari (Proposizione 40; la dim. non fa parte del programma d'esame) Continuità della somma di funzioni continue, del prodotto, del reciproco (purché il denominatore sia diverso da 0), e del quoziente (purché il denominatore sia diverso da 0) (tutto senza dimostrazione)

Teorema di Weierstrass sugli intervalli chiusi e limitati (con esempi e controesempi: $\frac{1}{x}$ aggiungendoci oppure no un valore in 0).

Teorema degli zeri: se una funzione continua in un intervallo assume valori positivi e negativi esiste almeno un punto in cui si annulla
(senza dimostrazione).

Corollario:
Teorema di tutti i valori: Una funzione continua in un intervallo, se assume due valori diversi y_1 e y_2 allora assume tutti i valori compresi tra di essi.
In altre parole: l'immagine di un intervallo è un intervallo (senza dimostrazione). $\blacksquare$

La funzione inversa di una funzione continua è continua, la funzione inversa di una funzione crescente è crescente, di una decrescente è decrescente.

Notare che dire che una funzione è continua in x_0 equivale a dire che $f(x_0 + h - f(x_0)$ è un infinitesimo per $h \to 0$, oppure che $f(x) - f(x_0)$ è un infinitesimo per $x \to x_0$.

Funzione composta con esempi (p. 104)
Limite di una funzione composta da funzioni continue.

Esempi

$$\lim_{x\to 0} e^{\sin x} = 1; \qquad \lim_{x\to \frac{\pi}{2}^-} \frac{3\tan^2 x - 5}{2\tan^2 x + 6} = \lim_{z\to +\infty} \frac{3z^2 - 5}{2z^2 + 6} = \frac{3}{2}$$

Una funzione composta di funzioni continue è continua, e quindi per le funzioni continue il limite della composta $f(g(x))$ è il limite di quella esterna f che opera sul limite di quella interna g.

Richiamo dei **due limiti fondamentali** (senza dim.):

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1; \qquad \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$$

Terzo limite fondamentale: $\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$.

Spiegazione di "in un intorno di x_0 una $f(x)$ *si comporta come* un'altra funzione $g(x)$":
se indichiamo con $o(x)$ un infinitesimo con x si ha, in un intorno di $x = 0$:

$$\lim_{x\to)} \frac{\sin x}{x} = 1 \Rightarrow \sin x x = x + o(x); \qquad \lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1 \Rightarrow e^x - 1 = x + o(x);$$

$$\arctan x = x + o(x); \qquad \tan x = x + o(x)$$

Enunciamo anche il fatto (che non dimostriamo) che è anche

$$\lim_{x\to +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e = 2,71828182845...$$

Qualche limite di forma indeterminata riconducibile a casi noti:

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{x}{\sqrt{5x^2-x+10}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x}{\|x|\sqrt{5-\frac{1}{x}+\frac{10}{x^2}}} = -\frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$\lim_{x\to0^+} (\log\sin 10x - \log 7x) = \lim_{x\to0^+} \log\frac{\sin 10x}{7x} = \lim_{x\to0^+} \log\frac{\sin 10x}{\frac{7}{10}10x} =$$

$$(\text{ posto } 10x = z) = \lim_{z\to0^+} \log\frac{10}{7}\frac{\sin z}{z} = \log\frac{10}{7}.$$

Problemi che conducono al concetto di **derivata**: tangente ad una curva e velocità di un corpo.