M164sett.tex

4a settimana
Inizio 2006/10/23

Terzo limite fondamentale (sul libro, p. 113, è chiamato “secondo”) $\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$.
La tangente al grafico nel punto $(0, 0)$ risulta quindi $y = x$.

Ricordare che e è il nome che diamo al limite della successione $(1 = \frac{1}{n})^n$, dopo aver dimostrato (cosa che noi abbiamo dato per buona) che è crescente ed è limitata, e quindi ha limite finito; una volta così definito il numero $e = 2,7182818284\ldots$ si può dimostrare che esiste finito anche $\lim_{x \to +\infty} (1 + \frac{1}{x})^x$ e che è proprio e.

Calcoliamo

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = (\text{ moltiplicando sopra e sotto per } 1 + \cos x) =$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin^2 x}{x^2} \cdot \lim_{x \to 0} \frac{1}{1 + \cos x} = \frac{1}{2}$$

Calcoliamo

$$\lim_{x \to \infty} x \sin \frac{1}{x} = \lim_{z \to 0} \frac{\sin z}{z} = 1$$

Problemi che conducono al concetto di derivata: tangente ad una curva e velocità di un corpo.

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Il rapporto tra la differenza delle ordinate e la differenza delle ascisse del punto mobile si dice *rapporto incrementale*.

Scritture del tipo $\frac{df}{dx}$, $\dot{y}$, $\quad \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x}$.

Derivata di una costante; derivata di $y = x$ nel punto c: $\lim_{h \to 0} \frac{(c+h) - c}{h} = 0$

Derivata di $f(x) = x^2$ (p. 119)

Derivabilità e continuità (p. 120): la seconda qualità implica che l'incremento della funzione è un infinitesimo per $x \to x_0$, la prima implica che è un infinitesimo tale che il limite del rapporto con $x - x_0$ è finito.

Relazione tra la derivata di f in un punto x_0 e la retta tangente al grafico della funzione nel punto $(x_0, f(x_0))$.

Regole di derivazione; derivata dei polinomi, di $\frac{1}{x}$, di e^x, delle funzioni trigonometriche, della funzione potenza anche con esponente reale (pp. 124-130 senza dimostrazioni, salvo che per il n. 3 di p. 124, pp. 136-137).

Alcuni esempi di funzioni non derivabili, ancorché continue: punti angolosi, $|x|$, $\sqrt{|x|}$, $x \sin \frac{1}{x}$, mentre lo è $x^2 \sin \frac{1}{x}$.
Infatti quest'ultima ha limite del rapporto incrementale per $x \to 0$, che viene 0, quindi la funzione è derivabile in 0 con derivata nulla, ma la derivata non è cotinua in $x = 0$. Grafici con punti in cui la tangente è verticale (pp. 122-123).
Concetto di derivata destra e sinistra:

Regola di derivazione delle funzioni composte. Formule (5.21) e (5.23) di p. 131 che rendono ragione della comodità della scrittura come quoziente.

Esempi di derivate con funzioni composte con i logaritmi, le esponenziali, i polinomi, le funzioni trigonometriche (pp. 132-134). Ricordare che la derivata della tangente si può anche scrivere $1 + \tan^2 x$.

Esempi di derivate di funzioni del tipo $f(x)^{g(x)}$ (§5.4.1):

$$x^x = e^{x \log x}$$

per cui

$$(x^x)' = e^{x \log x} \cdot (x \log x)' = e^{x \log x}(\log x + x\frac{1}{x}) = x^x(\log x + 1)$$

Si può notare che la funzione $\to +\infty$ per $x \to +\infty$, $\to 1$ per $x \to 0$ (confronto tra infinitesimi), e la sua derivata tende a $-\infty$, e si annulla per $x = 1/e$, e tende a $+\infty$ per $x \to +\infty$.

$f(x) = (\sin x)^x$ è definita solo negli intervalli in cui il seno è ≥ 0, a parte lo 0 stesso; lì la funzione si può scrivere: $e^{x \log(\sin x)}$ e quindi la derivata vale

$$e^{x \log(\sin x)} \cdot (\log(\sin x) + x(\log(\sin x))')$$

ed è

$$(\log(\sin x))' = \frac{1}{\sin x} \cdot \cos x = \frac{1}{\tan x}$$

Incollando i pezzi si ha:

$$f'(x) = (\sin x)^x(\log(\sin x) + \frac{x}{\tan x})$$

Questa derivata non esiste nei punti in cui il seno si annulla.

Imparare a memoria le derivate seguenti:

$$(\log x)' = \frac{1}{x}; \quad (\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}; \quad (\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}; \quad (\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}$$

Notare che $\arcsin x$, $\arccos x$ hanno la derivata che va all'infinito per $x \to \pm 1$. Invece la derivata dell'arcotangente $\to 0$ per $x \to \pm\infty$. Notare la tangente.

Calcolare la derivata di $f(x) = \arctan \sin x$, che è una funzione periodica di periodo 2π (e quindi lo è anche la sua derivata):

$$f'(x) = \frac{1}{1+\sin^2 x} \cdot \cos x$$

Essa si annulla per $x = \frac{\pi}{2} + K\pi$.

Calcolare la derivata di $f(x) = \arctan \sin^3 x$.
Risulta $f'(x) = \frac{1}{1+\sin^6 x} \cdot 3\sin^2 x \cdot \cos x$ che si annulla nei punti $K\pi$ e nei punti $\frac{\pi}{2} + K\pi$.

Calcolare la derivata di $f(x) = \arctan(\arccos x^2)$
Tale funzione è definita solo per $0 \geq x^2 \geq 1$, cioè per $-1 \geq x \geq 1$, ed è una funzione pari. La guardiamo solo per $x \geq 0$. L'arcocoseno risulta (decrescente e) limitato tra 0 e $\pi/2$. Pertanto l'arcotangente risulta (decrescente e) limitata tra 0 e $\arctan \frac{\pi}{2}$. Risulta $f'(x) = \frac{1}{1+\arccos^2 x^2} \cdot (-\frac{1}{\sqrt{1-x^4}} \cdot 2x$. Si annulla solo in $x = 0$.

Trovare le equazioni delle rette tangenti al grafico della funzione $f(x) = 3 - \frac{6}{2x-1}$ nei punti nei quali questo incontra gli assi coordinati.
I punti in questione sono $(0, 9)$ e $\frac{3}{2}, 0$. Risulta

$$f'(x) = \frac{12}{(2x-1)^2}$$

che per il primo punto risulta $f'(0) = 12$ e per il secondo risulta $f'(\frac{3}{2}) = 3$. Pertanto le rette sono $y - 9 = 12x \Rightarrow y = 12x + 9$ e $y = 3(x - \frac{3}{2}) \Rightarrow y = 3x - \frac{9}{2}$.

Derivate di ordine superiore. Accelerazione.

Alcune funzioni hanno derivate di tutti gli ordini (ad es. polinomi, che si annullano da una certa derivata in poi, le funzioni seno e coseno che si ripetono ciclicamente, la tangente, e^x, il logaritmo, ecc.

La retta normale ad un grafico è perpendicolare alla retta tangente, e quindi ha come coefficiente angolare $-\frac{1}{m}$. Perciò se la tangente al grafico di $f(x)$ nel punto $(x_0, f(x_0))$ nonè orizzontale, la normale non è verticale, e il suo coefficiente angolare è $-\frac{1}{f'(x_0)}$.

Def. di punto di massimo relativo (*interno*): $f(x_0) \geq f(x)$
Analogamente, di minimo.
Massimo proprio se la maggiorazione è stretta.

Nei punti di massimo o minimo relativi (interni) la derivata (se c'è!) è nulla.

Dim.: il rapporto incrementale è ≥ 0 da una parte, è ≤ 0 dall'altra; se $\exists$ il limite, non può essere altro che 0.

Teor. di Rolle (con dim.)

Teor. di Lagrange: $\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c)$.
(niente dim.: interpretazione geometrica).

Se su intervallo la derivata è sempre nulla, la funzione è costante.

Se su un intervallo due funzioni hanno la stessa derivata, esse differiscono per una costante.

Se una funzione ha derivata positiva in un intervallo, allora è crescente nell'intervallo (si basa sul teor. di Lagrange)

Teorema sul segno della derivata prima: se la derivata cambia segno e passa da positiva a negativa, c'è un massimo, altrimenti c'è un minimo.

Teor. di Cauchy (p. 170: attenti al trucco, non si può applicare il toer. di Lagrange semplicemente facendo il quoziente, perché c esprime punti diversi per la f e per la g !)

Funzioni iperboliche e loro derivate (non ci sono sul libro).

Regola di L'Hôpital, accenno ai vari casi, senza nessuna dimostrazione. (p. 171)

$$lim_{x\to\infty}\frac{\log x}{x} = \text{ (H) } = lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}}{1} = 0.$$

Del pari se ho $\sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}$.

Del pari $\frac{e^x}{x^3}$ per $x \to +\infty$.
Invece per $x \to -\infty$ NON siamo nel caso $\frac{0}{0}$; bisogna confrontare con x^k e derivando k volte il limite viene 0.

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{\tan x - x}$$

si deriva due volte, e viene $\frac{1}{2}$.

Le forme $0\cdot\infty$ si possono portare alla forma $\frac{0}{0}$:

$$\lim_{x\to 0^+} x \cdot lgx = \lim_{x\to 0^+}\frac{\lg x}{\frac{1}{x}}$$

e con la regola di L'Hôpital si vede che il limite è 0.

Stessa cosa se moltiplico per x^α con qualsiasi esponente $\alpha > 0$.

$$\lim_{x\to+\infty} x^\alpha - \log x$$

che è del tipo $\infty - \infty$ (vd. pag. 174). Mettiamo in evidenza x^α e occupiamoci soltanto della frazione $\frac{\log x}{x^\alpha}$ che abbiamo visto tendere a 0. Pertanto il tutto va a $+\infty$.

Se abbiamo un polinomio $P(x)$ e uno $Q(x)$ e si deve calcolare $\lim_{x\to+\infty} P(x) - \log Q(x)$, si mette in evidenza $P(x)$ e poi il limite viene infinito (vd. esempi pp. 174-175).

Del pari con funzioni del tipo $P(x) - e^x$ per $x \to +\infty$, viene $-\infty$.

Consideriamo adesso funzioni del tipo

$$f(x)^{g(x)} = e^{g(x)\log f(x)}$$

Ci troviamo davanti a situazioni del tipo $0^0,\ 1^\infty,\ \infty^0$

Ad esempio $lim_{x\to+\infty} x^{\frac{1}{x}}$.

L'esponente di e diventa $\frac{\log x}{x}$ che $\to 0$, e quindi il limite risulta 1.

Studiamo la funzione

$$f(x) = x\sqrt{x+1}$$

È definita per $x \geq -1$, tende a 0 per $x \to -1^+$, va all'infinito per $x \to +\infty$. La derivata si annulla in $x = -\frac{2}{3}$ ed abbiamo un minimo, guardando il segno della derivata.

A volte la regola di L'Hôpital non si può applicare subito, perchè non dà risultato immediato.

Esempio (p. 176):

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}$$

Derivando si peggiorano le cose, e quindi non è opportuno. Ponendo invece $\frac{1}{x} = t$ si ha

$$\lim_{t\to-\infty} t^2 e^t = \lim_{t\to-\infty} \frac{t^2}{e^{-t}} = H = 0.$$

Studio della funzione

$$\frac{1-e^x}{e^{2x}+1}$$

Per $x \to +\infty$ si applica l'Hôpital, invece per $x \to -\infty$ la funzione tende a 1. La derivata si annulla in due punti, uno positivo e uno negativo regola di Cartesio: una permanenza e una variazione). La funzione è positiva sul semiasse negativo, e negativa sul semiasse positivo, il grafico passa per l-origine, dove la derivata è negativa. Il punto di minimo è sul semiasse delle x positive, il punto di massimo è tra i reali negativi.

Studio della funzione

$$f(x) = \arctan \frac{1}{1-x^2}$$

Non è definita per $|x| = 1$, è pari, la studio solo per $x \geq 0$, per i reali negativi ha grafico simmetrico rispetto all'asse delle y. Ha limite per $x \to 1^+$ ed è $-\frac{\pi}{2}$; ha limite per $x \to 1^-$ ed è $+\frac{\pi}{2}$. Per $x \to \infty$ tende a 0 (mantenendo valori negativi).

Sono importanti tutti gli esempi da p. 168 a p. 183.

****

Non fanno parte del programma d'esame: le pagg. 146-161, la dim. di pag. 171; §7.2 .