M167sett.tex

7a settimana
Inizio 2006/11/13

Lunedì 13 novembre 2006

Richiamo sul differenziale e sul significato della notazione $\frac{df}{dx}$.
Richiamo del differenziale visto come parte principale di un infinitesimo (pp. 221-224).

Definizione di primitiva, e teor. sulle primitive (prop. 69, pp. 225-226, con dim.)

Attenzione alla costante: le costanti possono essere diverse se operiamo su insiemi che *non* sono intervalli.
Esempio con $\lg x + c$ visto come insieme di primitive (con costanti diverse sulle due semirette) della funzione $1/x$.

Definizione di integrale indefinito come famiglia delle primitive, e alcuni esempi di integrali immediati; integrale di una potenza; integrale di potenze con base una funzione, inparticolare alcuni casi facili in cui al denominatore c'è una funzione e al numeratore c'è la sua derivata (o quasi), tipo

$$\int \frac{x}{1+x^2}\,dx = \frac{1}{2}\lg(1+x^2)+c$$

(pp. 228-229).

Metodo di integrazione per parti e dimostrazione della formula (9.9).
Alcuni esempi semplici; attenzione alla scelta di quale fattore prendere per fattore finito e quale per fattore differenziale.

$\int \lg x\,dx$, $\int \arctan x\,dx$

In questi casi si prende 1 come fattore differenziale, e la sua primitiva è x, così quando si deve derivare il fattore finito si ottiene $\frac{1}{x}$ e $\frac{1}{1+x^2}$ rispettivamente, che conducono ad integrali facili.

Se si sbaglia a prendere il fattore finito, si può complicare la situazione invece che semplificarla.
Esempio con $\int x^2 e^x\,dx$, in cui se si prende come fattore differenziale x^2 poi risulta $x^3/3$ che peggiora la situazione; invece bisogna prendere x^2 come fattore finito.

Martedì 14 novembre 2006

Integrali applicando due volte l'integrazione per parti:

$$\int e^x \sin x \; dx = \cdots = \frac{1}{2} e^x (\sin x - \cos x) + c$$

$\int \sin^2 x \, dx = \sin x(-\cos x) + \int \cos^2 x \, dx = \ldots$ (scrivendo)$1 - \sin^2 x$ al posto di $\cos^2 x$ si ottiene

$$2 \int \sin^2 x \; dx = \frac{1}{2}(x - \sin x \cos x) + c$$

L'integrazione *per sostituzione* funziona se possiamo sostituire una variabile x con una funzione invertibile $\phi(t)$; allora l'integrale funziona in questo modo

$$\int f(x) \; dx = \int f(\phi(t)) \cdot \phi'(t) \; dt$$

(prop. 71, senza dim.)

Esempi

$$\int \frac{1 + e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} \; dx = \text{ si pone } \sqrt{x} = t$$

e si ottiene

$$2 \int 1 + e^t \; dt = 2(t + e^t) + c = \text{ ritornando alla posizione } = 2(\sqrt{x} + e^{\sqrt{x}}) + c$$

Un altro caso è

$$\int e^{x^2} \cdot x \; dx = (\text{posto } x^2 = t) = \frac{1}{2} \int e^t \; dt = \frac{1}{2} e^t + c = \frac{1}{2} e^{x^2} + c$$

Attenzione: se non ci fosse x a moltiplicare l'integrale non sarebbe esprimibile *in termini finiti.*

Altro esempio $\int e^x \sin e^x \; dx = -\cos e^x + c$

Altro esempio $\int \arcsin x \; dx$. Si integra per parti prendendo come fattore differenziale 1; risulterà una parte fuori dell'integrale e dentro una cosa del tipo

$$\frac{x}{\sqrt{1 - x^2}} \; dx$$

Ponendo $t = 1 - x^2$ si ha, sotto, la radice di t e sopra proprio $\frac{1}{2} \; dt$ e quindi il tutto viene $x \;\; \arcsin x + \sqrt{1 - x^2} + c$.

Integrazione delle funzioni razionali. Intanto bisogna ridurle a frazioni proprie, eventualmente eseguendo la divisione oppure escogitando qualche artificio:

$$\frac{x^2}{x+1}\,dx$$

si può aggiungere e togliere 1 al numeratore e semplificare e poi resta un plinomio di 1^o grado e il logaritmo di $x+1$.
Oppure si divide: eseguire una divisione tra $x^3 - x^2 + 3x + 6$ e $x^2 - 2$. Si arriva d un punto in cui si deve scomporre in fattori il denominatore e si devono trovare i coefficienti indeterminati (pp. 240, 241 ad eccezione del n. 3, 242, 243).

Funzioni razionali in e^x, purché si possa mettere e^x in evidenza.

Area del trapezoide (che sta sotto il grafico de una funzione continua) e integrale definito.

****
Non fanno parte del programma d'esame: la dim della prop. 71; l'es. di p. 238; la seconda metà di p. 241; § 954; §§ 9.6.2-9.6.4.