MATEMATICA 1
Corsi di Laurea in Ingegneria Elettrotecnica e in Ingegneria Energetica

8a settimana
Inizio 2006/11/20

Lunedì 20 novembre 2006

Integrale definito (§ 10.3 e § 10.4 per intero)
Definizione nel caso che la funzione sia continua e positiva in un intervallo: somma superiore e somma inferiore.

Integrale definito nel caso in cui la funzione sia a segno variabile.

Prime proprietà dell'integrale definito.
Definizione di integrale anche quando $a = b$ e anche quando $a > b$.
Additività su unione di intervalli:

$$\int_a^b f(x)\ dx = \int_a^c f(x)\ dx + \int_c^b f(x)\ dx$$

anche quando c non è interno ad $[a, b]$ (sempreché la funzione sia continua su tutto l'intervallo $[a, c]$.

Teorema della media integrale (con dim.; fare attenzione: se la funzione integranda non fosse continua non si potrebbe concludere che il valore $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\ dx$ è un valore assunto dalla funzione.

Teor di Torricelli (con dim.; attenzione: il valore $f(x_h)$ è calcolato in un punto che non sappiamo, che però è sempre interno all'intervallo $[x, x+h]$, e quindi per $h \to 0$ tale punto tende ad x).

Calcolo esplicito di qualche area.
Attenzione: se la funzione non è positiva, l'integrale non fornisce l'area delle zone tra l'asse delle x e il grafico della funzione, bensì considera con il segno positivo le aree delle zone in cui la funzione è positiva, e considera negative le zone in cui la funzione è negativa.

Integrazione per sostituzione negli integrali definiti. Quando si opera il cambiamento di variabili bisogna vedere la nuova variabile da dove a dove varia.
Tuttavia è consigliabile cercare una primitiva nella nuova variabile, poi risostituire la vecchia e quindi andare a calcolare la primitiva (nella vecchia variabile) in b quindi in a ed eseguire la sottrazione.

Dati iniziali (fino a metà di pag. 285)

Integrali generalizzati (§ 10.7), sia se fatti su intervalli illimitati, sia perché la funzione non è continua ed è illimitata (ad esempio in un intorno destro di a).
Si definisce:

$$\int_a^{+\infty} f(x)\ dx = \text{ (per definizione) } = \lim_{k\to+\infty} \int_a^k f(x)\ dx$$

$$\int_a^{b} f(x)\ dx = \text{ (per definizione) } = \lim_{k\to+\infty} \int_{\frac{1}{k}}^b f(x)\ dx$$

Una funzione *positiva* si dice *sommabile* su un intervallo se il suo integrale è finito.
Una funzione *di segno variabile* si dice *sommabile* su un intervallo se l'integrale del suo *modulo* è finito.

Le funzioni del tipo $f(x) = \frac{1}{x^k}$ e poste ad esempio uguali a 0 per $x = 0$:
- tra 1 e $+\infty$ sono sommabili se $k > 1$ e non lo sono se $0 < k \leq 1$;
- tra 0 e 1 sono sommabili se $0 < k < 1$ e non lo sono se $k \geq 1$.

Si noti che per $k = 1$ la funzione $\frac{1}{x}$ non è sommabile né vicino allo 0 (non è sommabile il suo modulo) né su una semiretta .

Calcoli espliciti di integrali di funzioni sommabili, ad es.

$$\int_0^1 \lg x\ dx = 1$$

(si noti che l'integrale di $\lg x$ va fatto per parti scrivendo $\lg x = \lg \cdot 1$).

- Per quali valori di a l'integrale

$$\int_a^{+\infty} \frac{e^{-\sqrt{x^2-1}}}{x-1}\ dx$$

è finito?
Per $a > 1$; infatti in un intorno di 1 la funzione integranda si comporta come $\frac{1}{x}$ e quindi non è sommabile; all'infinito invece va a 0 più rapidamente di $\frac{1}{x^2}$ (per esempio), e quindi risulta sommabile.

- La funzione $f(x) = x^2 \cos x$ come si comporta in un intorno (destro) dell'origine? (a sinistra è uguale, la f è pari). Tocca prima la parabola x^2 o quella $-x^2$? (la seconda; la prima la tocca, dopo l'origine, soltanto in $x = 2\pi$, e si annulla due volte nel mezzo).

- Date certe condizioni sulla f, determinare quale grafico può essere il suo grafico (ad esempio si valuta la derivata in un punto, o la convessità in un intervallo).

• Se f ha la derivata seconda che si annulla in un punto, ha necessariamente un punto di flesso in quel punto?
No, ad esempio $f(x) = x^4$ non ha flessi, eppure la sua derivata seconda si annulla in $x = 0$.

• Se una funzione due volte derivabile ha un flesso in x_0, allora in x_0 si annullano la sua derivata prima e seconda. È vero o falso?
Falso: la derivata prima non ha nessuna relazione con i flessi. Solo i flessi *orizzontali* comportano l'annullarsi anche della derivata prima.

• Se f è continua su $[a, b]$ e ha come immagine $[a, b]$, allora c'è certamente almeno un punto in cui è $f(x) = x$.
Infatti la funzione $g(x) = f(x) - x$ è tale che $g(a) \geq 0$ e $g(b) \leq 0$, e quindi esiste almeno un punto c in cui la $g(x)$ si annulla.

• Se tiriamo da un punto P del piano le tangenti al grafico di $\sin x$, c'è qualche punto P tale che le tangenti tirate da esso risultino ortogonali?
Il coefficiente angolare di una tangente al grafico di $\sin x$ è un valore di $\cos x$ e quindi è sempre compreso tra -1 e 1. Poiché se una retta ha coefficiente angolare m quella ortogonale ha coefficiente angolare $-\frac{1}{m}$, affinché questi numeri siano entrambi compresi tra -1 e 1 devono valere rispettivamente proprio 1 e -1. I punti in cui il coseno vale 1 sono i punti $x = 2k\pi$ e quelli in cui il coseno vale -1 sono $\pi + 2k\pi$. Prendendo $k = 0$ (poi tutto si ripete per periodicità) le due tangenti sono $y = x$ e $y = -(x - \pi)$ che si incontrano nel punto $P = (\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ che è uno dei punti cercati. L'altro, sempre all'interno dell'intervallo $[0, 2\pi]$, è $P = (-\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2})$. Tutti gli altri si trovano nei punti ripetuti per periodicità della prima coordinata (la seconda resta sempre $\pm\frac{\pi}{2}$).

****

Non fanno parte del programma d'esame: § 10.5; dal primo problema di pag. 285 alla fine di § 10.6; § 10.8.