M169sett.tex

Matematica 1 - a. a. 2006-2007

Nona settimana
Inizio 27/11/2006

Esercizi

- Studiare la funzione

$$x^2(\lg|x|-1)$$

Pari, quindi la studio solo per gli $x>0$.
È $\lim_{x\to 0}=0$, quindi f è prolungabile per continuità in una nuova funzione $g(x)$ che coincide con f per $x\neq 0$ e $g(0)=0$. Il prolungamento $g(x)$ è definito e continuo su $\mathbb{R}$ e lo studio solo per $x\geq 0$.
$\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=+\infty$
$f'(x)=2x\lg x-x$, che si annulla per $x=\sqrt{e}$, dove c'è un minimo.
La g si annulla per $x=0$ e $x=e$.
Per $x=\frac{1}{\sqrt{e}}$ c'è un flesso; a sinistra la funzione è concava, a destra è convessa.
$\lim_{x\to 0} f'(x)=0$: l'attacco in $x=0$ è a tangente orizzontale.

- Dire se esiste finito

$$\int_0^{+\infty} xe^{-\frac{x^2}{5}}\,dx$$

e in caso affermativo calcolarlo.

Esiste finito perché l'integranda va a 0 per $x\to+\infty$ più rapidamente ad esempio di $\frac{1}{x^2}$. Il calcolo porta

$$\lim_{k\to+\infty}\int_0^k xe^{-\frac{x^2}{5}}\,dx=(\textit{ponendo})-\frac{x^2}{5}=t \text{ da cui } x\,dx=-\frac{5}{2}\,dt=\cdots=\frac{2}{5}.$$

- Calcolare per quali a risulta finito

$$\int_2^{+\infty}\lg(x+1)-\lg(x-1)+\frac{a}{x}\,dx$$

e per quei valori di a calcolarlo.
Il logaritmo non è sommabile, ci si trova con una forma $+\infty-\infty$.
Si integra per parti (il termine $\frac{a}{x}$ lo trascriviamo semplicemente e lo considereremo dopo)

$$\int_2^k \lg\frac{x+1}{x-1}+\frac{a}{x}\,dx=\ldots\left[x\lg\frac{x+1}{x-1}\right]_2^k+\int_2^k\frac{2x}{(x-1)(x+1)}+\frac{a}{x}\,dx$$

Dapprima si calcola il primo termine della somma, che presenta una indeterminazione della forma $\infty\cdot 0$, che si risolve con L'Hôpital, e risulta alla fine $\cdots=2-2\lg 3$.

Poi si calcola il secondo termine: riducendo i termini dell'integranda allo stesso denominatore si ha

$$\frac{2x^2 + a(x^2 - 1)}{x(x+1)(x-1)}$$

e questa funzione ha integrale finito soltanto se al numeratore vi è un polinomio di *due* gradi inferiore a quello del denominatore, cioè se $a = -2$. Per tale valore di a l'integrale risulta

$$\int_2^k \frac{2}{x(x-1)(x+1)}\ dx$$

che risulta finito. L'integranda si scompone in fratti semplici:

$$\frac{2}{x(x-1)(x+1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{x-1}$$

e si trovano i coefficienti, che risultano (salvo errori) $A = -2,\ B = 1,\ C = 1$. Le primitive sono dei logaritmi dei quali uno con segno negativo e quindi figura il logaritmo di un quoziente che per $k \to +\infty$ ha limite finito.
Dopo si somma tutto.

- Trovare la primitiva $F(x)$ di

$$f(x) = \sqrt{x} + x \lg x + \frac{1}{1 + 2x^2}$$

tale che $F(1) = 2$.

La famiglia delle primitive risulta (il secondo termine si integra per parti e nel terzo si nota che si può scrivere $2x^2 = (\sqrt{2}x)^2$):

$$\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + \frac{x^2}{2}\lg x - \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\sqrt{2}x + c$$

e ponendo $F(1) = 2$ si ottiene (salvo errori) $c = \frac{19}{12} - \frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\sqrt{2}$.

- Calcolare

$$\int_0^2 \sqrt{x+3}(2x+9)\ dx$$

Si pone $\sqrt{x+3} = t$ da cui $x = t^2 - 3 \longrightarrow dx = 2t\ dt$.
Adesso si possono calcolare le primitive della funzione espressa nella variabile t, poi ritornare alla variabile x, calcolare una primitiva in 2, quindi in 0 e sottrarre.
Altrimenti, *se non si vuole tornare alla variabile* x, si può calcolare l'integrale definito nella variabile t, ma allora si deve stare attenti che l'integrale va da $\sqrt{3}$ a $\sqrt{5}$, che sono i valori che assume la t quando x assume rispettivamente i valori 0 e 2.

• Studiare la funzione $f(x) = x^2 - \sin x^2$.

È pari, vale 0 nell'origine; per gli $x > 0$ è sempre > 0 (qualsiasi arco positivo è sempre maggiore del proprio seno). Tende a $+\infty$ per $x \to \infty$.
È $f'(x) = 2x - \cos x^2 \cdot 2x$ che si annulla in 0 e dove $\cos x^2 = 1$, cioè per $x = \pm\sqrt{2K\pi}$, $K > 0$; altrove è positiva, quindi la funzione è crescente e in tali punti avrà dei flessi orizzontali. Che siano flessi è confermato dalla derivata seconda: $f''(X) = 2(1 - \cos x^2) + 4x^2 \sin x^2$ (dove il coseno vale 1 il seno si annulla). La derivata seconda si annulla anche in $x = 0$, ma lì *non* c'è flesso, ma un minimo (assoluto): l'annnullarsi delle f'' in un punto non garantisce l'esistenza del flesso in quel punto, ma soltanto che quel punto è un buon candidato per l'esistenza del flesso.

• Studiare la funzione $f(x) = x^2 - \sin^2 x$.

È pari. Sviluppando con Taylor nel punto $x = 0$ si vede che la parte principale dell'infinitesimo è del tipo kx^6; altrove la f è positiva (se $x\ \sin x$ la disuguaglianza rimane dello stesso verso anche per i quadrati). La derivata $f'(x) = 2x - 2\sin x \cos x$ è, per $x > 0$, strettamente positiva (il secondo termine è sempre $/leq \sin x$) per cui la funzione è sempre strettamente crescente. La derivata seconda è $f''(x) = 2 - 2(\cos^2 x - \sin^2 x)$ che è sempre strettamente positiva (il fattore in parentesi non raggiunge mai 1 perché dove il coseno vale 1 il seno vale 0). La f è quindi sempre convessa.

• Qual è la primitiva di

$$\lg \frac{x-2}{x+3}$$

che vale 1 per $x = 10$?

Si integra per parti prendendo $\lg \frac{x-2}{x+3}$ come fattore finito e 1 come fattore differenziale; si trova una famiglia di primitive $F(x)$ che differisocno tra loro per una costante, che si trova imponendo la condizione $F10) = 1$.

• In quanti punti la tangente al grafico della funzione

$$F(x) = \int_2^x t \lg(t-1)\ dt$$

è parallela alla bisettrice del 1^o e 3^o quadrante?

La derivata della $F(x)$ è l'integranda, quindi si tratta di trovare per quanti x risulta $F-(x) = f(x) = x\lg(x-1) = 1$. La funzione $f(x)$ è un logaritmo traslato, che si va a $-\infty$ per $x \to 1$, si annulla per $x = 2$, va a $+\infty$ per $x \to +\infty$ e incontra il ramo positivo dell'iperbole $g(x) = \frac{1}{x}$ in un punto solo (di ascissa chiaramente > 2.)

• Si dica se $\frac{\sin x}{x^3}$ è sommabile su $[1, +\infty)$, e perché.
Sì, perché il suo modulo è maggiorato da $\frac{1}{x^3}$, che è sommabile.

• Quale è vera?

$$\int_{-\infty}^1 \frac{dx}{\sqrt{2-x}}$$

a) converge b) diverge a $+\infty$ c) diverge a $-\infty$.
La b); la c) è assurda.

- Quale è vera?

$$\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{2-x}}\, dx =$$

a) $\sqrt{2}$ b) $2\sqrt{2}$ c) diverge a $+\infty$ d) $-2\sqrt{2}$
La b) (si calcola); la d) è assurda, la c) è sbagliata.

- Cosa si può dire dell'integrale

$$\int_1^{+\infty} \frac{x + 2\sin x}{x^3 + 2\sqrt{x}}\, dx \ ?$$

a) converge b) diverge a $+\infty$ c) oscilla d) dipende da x.
È vera la a) perché all'infinito l'integranda si comporta come $\frac{1}{x^2}$. La c) e la d) sono palesemente assurde.

- Esiste finito l'integrale

$$\int_2^{+\infty} \frac{1}{x(x+1)}\, dx \ ?$$

Sì, perché all'infinito la funzione integranda va a 0 del secondo ordine (come $\frac{1}{x^2}$). Tuttavia, attenzione: quando si scompone la funzione integranda in fratti semplici del tipo $\frac{A}{x}+\frac{B}{x+1}$, A e B non possono essere entrambi positivi (né entrambi negativi), altrimenti le primitive che sono dei logaritmi, non hanno limite finito. Se invece uno dei coefficienti è negativo, si tratta del logaritmo di un quoziente.

- Trovare quanti zeri ha la funzione $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 7$.

La funzione tende a $-\infty$ per $x \to -\infty$ e tende a $+\infty$ per $x \to +\infty$, e quindi, data la continuità, esiste almeno un punto in cui vale 0. La derivata prima è $f'(x) = 6x^2 - 6x - 12 = 6(x+1)(x-2)$ che si annulla in due punti, che sono un massimo in $x = -1$ e un minimo in $x = +2$. Il calcolo della funzione in tali due punti porta alla conclusione che nel punto di massimo relativo la funzione è positiva, mentre nel punto di minimo relativo è negativa, e quindi i punti in cui la funzione si annulla sono tre: uno a sinistra del massimo, uno tra il massimo e il minimo, e l-ultimo a destra del minimo.

- La funzione

$$f(x) = \frac{x^2}{100} + \frac{x}{50} + 400, \qquad x > 0$$

rappresenta il *costo totale* della produzione di una certa merce, in funzione della quantità x prodotta.
Il *costo medio* per unità di prodotto è dato da

$$g(x) = \frac{f(x)}{x} = \frac{x}{100} + 50 + \frac{400}{x}$$

Trovare il minimo di tale funzione.

Il termine noto potrebbe rappresentare l'affitto del locale, che non dipende dalla quantità di merce prodotta, e che ovviamente incide di più sul costo medio se si produce poco. D'altra parte, essendoci un termine che va all'infinito del secondo ordine, non è conveniente produrre troppo. Il minimo si trova per $g'(x) = \frac{1}{100} - \frac{400}{x^2} = 0 \longrightarrow x^2 = 40.000$ da cui, essendo $x > 0$ si ha $x = 200$.

• Dimostrare che $\frac{\sin b - \sin a}{b-a} \leq 1$.

Infatti la derivata del seno è il coseno, che è sempre < 1, e quindi il teor. di Lagrange assicura che la frazione è uguale al $\cos c$ per qualche $c$opportuno.

• Data la funzione $F(x) = \int_0^x (t^2 - \cos x - a)\ dx$ determinare per quali valori di a essa ha dei massimi e/o minimi relativi.

La derivata è $F'(x) = x^2 - \cos x - a$; l'intersezione dei grafici mostra che la parabola $g(x) = x^2$ interseca la funzione $h(x) = \cos x + a$ in due punti per $a < -1$, e in un punto per $a = -1$, non vi è intersezione per $a > -1$ e la F' risulta positiva. Per $a = 1$ si ha un flesso orizzontale e per $a < 1$ si hanno due punti in ci la derivata si annulla, che corrispondono ad un massimo e ad un minimo.

Giovedì 30.11.2006

Esercitazione in preparazione della II prova parziale.