MATEMATICA 1 - Ing. Elettrotecnica e Ing. Energetica
Prova parziale del 6.12.2006 **Temi A-B-C-D** Tempo concesso: 90 minuti

Abbozzo di soluzioni per gruppi di esercizi. Gli esercizi erano molto simili (alcuni proprio si ripetevano) nei vari temi. EF indicano gli errori più frequenti.

TEOREMI
Enunciare e dimostrare il teor. della media integrale.
Enunciare e dimostrare il teor. di Torricelli.
Sol. - Hanno risolto bene quasi tutti; qualcuno nel secondo ha fallito l'aggancio al teor. della media, o non è passato al limite.

LIMITI
Erano due:

$$\lim_{x\to 0} \frac{2x - \sin x - \tan x}{2(\cos x - 1)}$$

e

$$\lim_{x\to 0} \frac{2x - \sin x + \tan x}{2(\cos x - 1)}$$

Sol. - Nel primo al numeratore c'era un infinitesimo del terzo ordine, perché le parti principali di $-\sin x$ e di $-\tan x$, che valgono entrambe $-x$, si eliminavano con $2x$. Restavano quelle complementari, che erano del tipo $x^3 + o(x^3)$, che si sommavano. Al denominatore c'era un infinitesimo del secondo ordine, e pertanto il limite era 0. Si vedeva anche con L'Hôpital con due passaggi. EF: vari studenti hanno semplicemente messo le parti principali al numeratore e le hanno eliminate, facendo venire 0 subito, indipendentemente dal denominatore. Il risultato veniva giusto per caso: se al denominatore ci fosse stato un inf.mo del 3o ordine il risultato era sbagliato. Nel secondo limite invece al numeratore le parti principali *non* si eliminavano completamente, e quindi l'infinitesimo rimaneva del primo ordine; essendo il denominatore del secondo, tutti hanno scritto che il limite era ∞, ma SOLO DUE candidati si sono accorti che veniva $-\infty$ da destra e $+\infty$ da sinistra.

STUDIO DI FUNZIONI
Erano due

$$f(x) = \lg \frac{x-1}{x+1}; \qquad f(x) = e^{\frac{x-1}{x+1}}$$

Sol. - La prima era definita solo per $|x| > 1$, e il grafico era costituito da due rami di iperbole equilatera che occupavano il 2o e 4o quadrante, lasciando non occupata la striscia compresa tra gli asintoti verticali $x = -1$ e $x = +1$. EF: molti hanno scritto che la funzione è crescente su tutto il suo insieme di definizione, dato che la derivata non si annulla mai, ma invece essa è crescente sulle due semirette singole, ma NON su tutto l'i.d.d.

La seconda era definita per $x \neq -1$, aveva limite e per $x \to \pm\infty$; non tutti si sono accorti che il limite per $x \to -1^+$ era 0, e pochissimi hanno guardato l'attacco, constatando che era nullo anche il limite della derivata prima, il che quindi causava che c'era un flesso tra -1 e $+\infty$. Alcuni hanno fatto venire valori negativi!!!

INTEGRALI E FUNZIONI SOMMABILI

Calcolare

$$\int \frac{e^x}{e^{2x}+1}\, dx$$

Tra queste primitive ce n'è una che vale 0 nel punto $x = 0$?
Esiste l'integrale definito $\int_0^1 \frac{e^x}{e^{2x}+1}\, dx$?

Sol. - Bastava porre $e^x = t$, da cui $x = \lg t \Longrightarrow dx = \frac{1}{t}\, dt$. Ovviamente dato qualsiasi valore nel punto 0 c'è una primitiva che lo assume. Qui la costante era $c = -\frac{\pi}{4}$. L'integrale definito esiste dato che l'integranda è continua; qualcuno lo ha anche calcoalto (non era richiesto).

Si dica se la funzione

$$f(x) = \frac{x + e^{-x}}{x^2}$$

è sommabile da 0 a 2 e da 2 a $+\infty$.

Sol. - Non lo è in nessuno dei due casi. In un intorno di 0 si comporta come $\frac{1}{x^2}$, e in un intorno di $+\infty$, cioè sulla semiretta, va a 0 come $\frac{1}{x}$.
EF: vari hanno detto giusta la non sommabilità in un intorno di 0, ma credendo che la funzione si comportasse come $\frac{1}{x}$, mentre il numeratore va a 1, *non* a 0. Altri hanno sbagliato sulla semiretta, credendo che l'andare a 0 rapido di e^{-x} trascinasse a 0 tutto, mentre proprio l'esponenziale,che va a 0, è trascurabile rispetto ad x, che va all'infinito.

La funzione

$$f(x) = \int_0^x \arcsin\sqrt{2t - t^2}\, dt$$

è monotona nell'intervallo $[0, 1]$? Giustificare la risposta.

Sol. - La derivata della funzione è la funzione integranda, che è un arcoseno di qualcosa di positivo, e quindi è positiva. Tanto basta per garantire la monotonia della f.
EF: molti hanno invece faticosamente studiato l'integranda e hanno scoperto che quella era monotona crescente, e hanno creduto che l'esercizio fosse risolto così. Invece dovevano verificare la *positività* dell'integranda. Ovviamente, dato che l'integranda era davvero crescente in quell'intervallo (ma non ad esempio tra 1 e 2), ed aveva valore nullo in $x = 0$, nell'intervallo [0.1] era positiva.

GENERALITÀ SU FUNZIONI

Una funzione derivabile su un intervallo limitato $[a, b]$ ha sempre anche integrale finito su tale intervallo? Se sì dire perché, se no trovare un controesempio.

Sol. - Ovviamente sì, dato che è continua.

Si dia un esempio di funzione continua e positiva, definita sulla semiretta $[2, +\infty)$, che tende a 0 per $x \to +\infty$, che non è sommabile sulla semiretta, e tuttavia sulla semiretta è sempre $f(x) < \frac{1}{x}$.

Sol. - Bastava prendere $\frac{1}{x+1}$ o un'altra quasiasi funzione che andasse a 0 come $\frac{1}{x}$ restando minore di questa, ad esempio $\frac{1}{2x}$.
EF: parecchi hanno invece preso funzioni che non erano sommabili, ma che però erano *maggiori* di $\frac{1}{x}$, prendendo un denominatore più piccolo. Altri hanno creduto che una funzione minore di $\frac{1}{x}$ dovesse per forza essere una funzione che andava a zero di ordine superiore al primo; ovviamente in tal caso si imbattevano in una funzione sommabile, che qundi non rispondeva ai requisiti del problema.

Sia $f(x)$ una funzione continua e positiva, definita sulla semiretta $[a, +\infty)$.
Si dica se sono validi i seguenti asserti, giustificando le risposte:
a) la funzione è sempre sommabile sulla semiretta
b) la funzione non è mai sommabile sulla semiretta
c) la funzione è sommabile solo se è limitata
d) la funzione è sommabile solo se è anche derivabile

Sol. - Tutte false, controesempi banali. Un controesempio per la c) c'era sul compitino.
EF: pochi le hanno fatte giuste tutte.

Due infinitesimi f e g sono entrambi di ordine 2 per $x \to x_0$.
Qual è l'infinitesimo campione rispetto al quale si verificano gli ordini?
La funzione $f \cdot g$ è ancora un infinitesimo? Se sì, è di ordine 2?
E la funzione $f + g$ è ancora un infinitesimo? Se sì, è di ordine 2?

Sol. - L'infinitesimo campione è $x - x_0$, NON $(x - x_0)^2$. Il prodotto è un infinitesimo di ordine 4, in quanto

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f}{(x - x_0)^2} = l_1 \neq 0, \quad \lim_{x \to x_0} \frac{g}{(x - x_0)^2} = l_2 \neq 0 \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \lim_{x \to x_0} \frac{fg}{(x - x_0)^4} = l_1 l_2 \neq 0$$

La somma invece può non essere di ordine 2, ma di ordine superiore: se $l_1 = -l_2$ si eliminano le parti principale e restano quelle complementari.
EF: alcuni hanno detto che l'ordine è 4 anche per la somma.

Si dica se la funzione

$$f(x) = |x| \cdot x^2$$

è derivabile nel punto $x = 0$, e in caso positivo se ne calcoli la derivata. Quindi si dica se ha integrale finito tra -1 e +1, e in caso positivo lo si calcoli.

Sol. - La funzione è pari e vale x^3 per gli $x \geq 0$ e $-x^3$ per gli altri, la sua derivata è $3x^2$ per gli $x > 0$ e $-3x^2$ per gli $x < 0$, e quindi è nulla per $x = 0$. L'integrale, come per tutte le continue, è finito, e come per tutte le funzioni pari vale $2\int_0^1 x^3\ dx = 2\frac{1}{4} = \frac{1}{2}$.
EF: vari hanno fatto venire l'integrale uguale a 0, non cambiando il segno nella parte delle $x < 0$. Alcuni hanno detto che la funzione non era derivabile, perché il modulo non lo è.

INTEGRALI FINITI
Calcolare

$$\int_2^3 \arctan \frac{1}{x-6}\ dx$$

$$\int_2^3 \arctan \frac{1}{x-1}\ dx$$

Sol. - La seconda c'era sulle soluzioni del compitino.
EF: molti sono naufragati nei calcoli perché, trovando al denominatore un polinomio di secondo grado, non sono stati capaci di compattarlo nel tipo $(x-1)^2 + k$.

Sia f una funzione (non identicamente nulla) continua, derivabile e dispari nell'intervallo limitato $[-a, a]$ $(a > 0)$. Si dica se sono veri o falsi i seguenti asserti, giustificando le risposte:
a) la derivata si annulla in $x = 0$
b) la funzione è strettamente monotona in $[-a, +a]$
c) l'integrale su $[-a, a]$ è nullo
d) la funzione è un polinomio di grado dispari.

Sol. - La a) e la b) non hanno nessuna relazione con le ipotesi e quindi sono false; è vera la c); la d) è falsa, perché ci sono funzioni dispari che non sono polinomi.
EF: sulla d) molti hanno equivocato, dicendo che un polinomio di grado dispari è una funzione dispari; ciò è vero, ma si chiedeva l'inverso, cioè se una funzione dispari debba per forza essere un polinomio, il che non è (vd. il seno).

Sia $f(x)$ una funzione derivabile e positiva, definita sulla semiretta $[a, +\infty)$.
Si dica se sono validi i seguenti asserti:
a) la funzione non è mai sommabile sulla semiretta
c) la funzione è sommabile solo se è limitata

d) la funzione è sommabile solo se sulla semiretta assume sempre valori minori di $\frac{1}{x^2}$.

Sol. - False tutte.

EF: alcuni hanno detto che era vera la d) in quanto se una funzione assume valori minori di $\frac{1}{x^2}$ essa risulta sommabile; ma si chiedeva il viceversa, cioè se è sommabile *solo* in quel caso; ciò ovviamente non è, basta prendere $\frac{2}{x^2}$, oppure $\frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}$.

La somma di funzioni sommabili su un certo intervallo $[a, b]$ è sommabile sullo stesso intervallo? e il prodotto? Si diano giustificazioni delle proprie risposte.

Sol. - La somma lo è perché se le singole funzioni hanno integrale finito, l'integrale della somma è la somma degli integrali, e quindi è finito. Il prodotto può non esserlo, perché ad esempio $\frac{1}{\sqrt{x}}$ è sommabile in un intorno di 0, mentre il suo quadrato non lo è.

EF: vari hanno creduto di dimostrare il primo asserto facendo un esempio (con gli esempi singoli non si dimostra la verità di nessun asserto, piuttosto con dei controesempi si dimostra che è falso).

Sia f una funzione (non identicamente nulla) continua, derivabile e pari nell'intervallo limitato $[-a, a]$ $(a > 0)$. Si dica se sono veri o falsi i seguenti asserti, giustificando le risposte:

a) la derivata si annulla in $x = 0$

b) la funzione è convessa in $[-a, +a]$

c) l'integrale su $[-a, a]$ è il doppio dell'integrale su $[0.a]$.

d) la funzione è un polinomio di grado pari.

Sol. - Assolutamente simmetrica ad una vista sopra. False la a), b), d), vera la c).