MATEMATICA 1 a. a. 2006-2007

Ingegneria elettrotecnica e Ingegneria energetica

Prova parziale dell'8.11.2006 Tempo concesso: 90 minuti

Abbozzi di soluzioni. I numeri di paragrafi o pagine si riferiscono al libro di testo: G. Artico, *Istituzioni di Matematiche*, Progetto, 2a ed. 2005. La sigla EF indica gli errori più frequenti constatati negli elaborati corretti.

Tema A

1. Si dica cosa significa $lim_{x\to 3}f(x) = 2$ e si faccia un grafico di una funzione che goda di questa proprietà.
   SOL.- Vd. def. 24, p. 67 dove al posto di x_0 va scritto 3 e al posto di l va scritto 2.
   EF: alcuni scambiano l'ϵ con il δ fissando prima quello che invece viene in conseguenza. Altri fanno un grafico in cui il limite è solo da una parte.

2. Studiare la funzione $f(x) = |\lg|x||$ indicandone esplicitamente gli eventuali massimi e minimi assoluti e gli intervalli di crescenza e decrescenza.
   SOL.- Funzione pari, sempre non negativa, definita in $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. Asintoto verticale $x = 0$; minimo assoluto in $x = \pm 1$ che vale 0. Continua ovunque nel suo insieme di definizione, non derivabile in $x = \pm 1$ (derivata destra in $x = +1$ è $f_d(1) = 1$, derivata sinistra $f_s(1) = -1$,e simmetricamente in $x = -1$. Limiti per $x \to \pm\infty$: $+\infty$.
   EF: alcuni hanno disegnato la funzione come fosse negativa.

3. Studiare la funzione
   $$f(x) = \frac{15}{x} - \lg(x^2 + 2x)$$
   (lo studio della f'' è facoltativo).
   SOL.- Funzione definita al di fuori dell'intervallo chiuso $[-2, 0]$ dove l'argomento del logaritmo è negativo o nullo. Asintoti verticali $x = 0$ e $x = -2$. Limiti per $x \to \pm\infty$ entrambi $-\infty$.
   $$f'(x) = -\frac{2x^2 + 17x + 30}{x^2(x + 2)},$$
   che si annulla in $x = -6$ e in $x = -\frac{5}{2}$, che sono rispettivamente un punto di massimo e un punto di minimo relativi e dove la funzione vale rispettivamente $-\frac{5}{2} - 3\lg 2 - \lg 3$ e $-6 - \lg 5 - 2\lg 2$. Per il teor. di "tutti i valori" la funzione si annulla in un punto compreso tra $-\frac{5}{2}$ e -2 e in uno con ascissa positiva.
   EF: pochi hanno affrontato l'esercizio, alcuni hanno sbagliato a derivae,

pochissimi hanno saputo risolvere l'equazione $f'(x) = 0$ (che pure era un'equazione di secondo grado) perché non hanno saputo ridurre allo stesso denominatore due frazioni. In conseguenza sono risultati vari grafici, molto diversi da quello giusto.

4. Si enunci il teorema del valor medio.
   SOL.- Teor. 55, p. 166.

5. Una funzione costante ha derivata nulla. Quale condizione aggiuntiva ci vuole perché sia vero anche il viceversa? Perchè?
   SOL.- Che la funzione sia definita su un intervallo, in tale caso l'asserto diventa un corollario de teor.di Lagrange.
   EF: vari hanno equivocato credendo che "derivata nulla" significasse "nulla in un punto" ed hanno detto che era necessario che fosse nulla sempre, cosa che era già acquisita. Altri hanno detto che la derivata diuna costante è nulla, cosa vera, ma non pertinente.

6. Studiare la funzione
   $$e^{\frac{x+1}{x-2}}$$
   SOL.- Se ne studia dapprima l'esponente, che rappresenta un'iperbole equilatera non definita per $x = 2$, con asintoto orizzontale completo $y = 1$ e con asintoto verticale completo $x = 2$, decrescente sulla semiretta $(-\infty,\ 2)$ e sulla semiretta $(2,\ +\infty)$ (*non* sul complesso delle due semirette!), priva di massimi e minimi sia assoluti che relativi. Pertanto la f è non definita in $x = 2$, ha asintoto orizzontale completo $y = e$, è decrescente sulle due semirette singolarmente. È $\lim_{x\to 2^+} f(x) = +\infty$, $\lim x \to 2^- f(x) = 0$. L'attacco sinistro in 0 è a tangente orizzontale, per cui nella semiretta dei negativi deve esserci un punto di flesso.
   EF: pochi hanno guardato l'attaccosinistro in $x = 0$.

7. Una funzione derivabile in un punto è anche continua? Se sì, dimostrarlo, se no, trovare un controesempio.
   SOL. ed EF.: vd Tema B.

8. Calcolare $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x + \operatorname{tg} x - x}{1 - \cos x}$.
   SOL.- Regola di L'Hôpital: il risultato è ∞, e più propriamente $+\infty$ per $x \to 0^+$ e $-\infty$ per $x \to 0^-$ (si può notare che il denominatore è sempre positivo in un intorno di 0, mentre il numeratore cambia segno nel passaggio dagli x negativi agli x positivi.
   EF: stranamente, molti, nel derivare il denominatore, hanno tenuto la costante 1. Nessuno si è preoccupato del distinguere i limiti destro e sinistro.

9. La funzione $\sqrt{x}\sin x$ è limitata nel suo insieme di definizione? Ha limite per $x \to 0$? e per $x \to +\infty$?
   Giustificare le risposte.
   SOL.- Il grafico della funzione si appoggia al grafico di $g(x) = \sqrt(x)$ tutte le volte in cui il seno vale 1 e al grafico di $g(x) = -\sqrt(x)$ tutte le volte in cui il seo vale -1. Pertanto non è limitata nel suo insieme di definizione e non ha limite per $x \to +\infty$. Ha invece ovviamente limite per $x \to 0$, risultando il prodotto di una funzione limitata per un infintesimo.
   EF: vari si sono lasciati distrarre dall'espressione "nel suo insieme di definizione" e hanno creduto che si chiedesse se l'insieme di definizione era limitato, cosa che ovviamente non era, ma era soltanto limitato inferiormente, in quanto è $x \geq 0$. Altri hanno detto che il limite per $x \to \infty$ era infinito. Altri pur dicendo che ili limite non eesisteva, lo hanno giustificato in modo errato, dicendo che non esiste il limite del prodotto di una funzione che ha limite per una che non ce l'ha. Qeusto non è vero, bsta pensare al prodotto di $\sin x$ per $\frac{1}{x}$ che tende a 0 al tendere di $x \to \infty$.

10. Si dia la definizione di *funzione pari.*
    La funzione $f(x) = |x|^{-1} - \arctan|x| + \cos x$ è pari?
    SOL.- f è pari se $f(x) = f(-x)$. La somma di funzioni pari, come nell'esercizio, è pari.

Tema B

1. Si dia la definizione dell'espressione

$$\lim_{x \to x_0} = 4$$

   e si abbozzi un grafico di una funzione che goda di questa proprietà.
   SOL.- Vd def. 24 e fig. 3.2, p. 69, dove al posto di l va scritto 4.
   EF: spesso trovati scambiati l'ϵ e il δ, o trovato che era prefissato l'intervallo sull'asse delle x invece che quello sull'asse delle y. Spesso i grafici evidenziavano soltanto il limite fatto da una parte.

2. Si tracci il grafico delle seguenti funzioni:

$$\cos(x+2) \qquad \cos|x+2| \qquad |cos(x+2)|$$

   SOL.- Basta fare il grafico di $\cos x$, poi quello di $\cos|x|$ che è uguale, data la parità del coseno, quindi di ribaltare la parte sotto l'asse x sopra. Quindi per tutti i grafici spostare l'asse y in modo da portarne l'origine nel punto $x = -2$.

EF: L'asse è stato spostato nel punto $x = +2$. Chi ha spostato l'asse anche dalla parte giusta non ha verificato che il punto $x = -2$ è *a sinistra* di $-\frac{\pi}{2}$ e a destra di $-\pi$. Altri hanno fatto capitare il punto $x = -2$ in un punto in cui il coseno aveva un massimo o si annullava.

3. Studiare la funzione
$$e^{\frac{x+1}{x-1}}$$
(insieme di definizione, immagine, limiti, eventuali massimi e minimi, crescenza e decrescenza, continuità e derivabilità, eventuali attacchi, abbozzo del grafico).
SOL.- Studiare prima la funzione $\frac{x+1}{x-1}$, definita per $x \neq 1$ che ha asintoto verticale $x = 1$ e asintoto orizzontale completo $y = 1$ e per il resto è un'iperbole equilatera, senza massimi né minimi. Poi, dato che l'esponenziale è una funzione crescente, essa, come il suo esponente, non ha né massimi né minimi ed ha asintoto orizzontale completo $y = e$. Il limite per $x \to 1^+$ è $+\infty$, mentre il limite per $x \to 1^-$ è 0. Anche per la derivata il limite per $x \to 1^-$ è 0, quindi l'attacco sinistro è a tangente orizzontale, e prima di 0 c'è un flesso.
EF: molti non sono stati attenti che il limite di un'esponenziale per l'esponente che tende a $-\infty$ è 0. Altri non hanno guardato l'attacco sinistro (limite della f') nel punto $x = 1$.

4. Si traccino, al variare del parametro a, i grafici delle funzioni seguenti:
$$f(x) = x^\alpha,$$
dove α è un parametro reale > 0. Hanno un massimo e un minimo assoluti? È contraddetto il teor. di Weierstrass? Perché?
SOL.- Cd. fig. 2.12, p. 46. Le funzioni del tipo x^α con α reale qualsiasi sono definite solo per $x \geq 0$; soltanto per α intero sono definite anche per $x < 0$ (ma, se $\alpha < 0$, non per $x = 0$). Il teor. di Weierstrass non è contraddetto: semplicemente non è verificata l'ipotesi che la funzione sia definita su un intervallo chiuso e limitato, e qunidi non è necessariamente verificata la tesi. Esiste sempre il minimo in $x = 0$ che vale 0, ma non il massimo.
EF: molti hanno guardato solo gli α interi e hanno parlato di α pari e dispari, mentre tra i reali non c'è pari o dispari; alcuni hanno creduto che si tratti sempre di parabole e che al crescere di α diventassero sempre più aperte. Pochissimi hanno fatto incrociare i grafici in $(1, 1)$. Vari hanno detto che era contraddetto il teor. di Weierstrass, mentre dovevano dire che non è verificata una delle sue tesi.

5. La funzione
$$f(x) = \lg x + e^{-x} + \arctan x$$

si annulla certamente in un punto dell'intervallo aperto $]0,1[$.
SOL.- Teor. degli zeri (p. 101): basta vedere che in due punti di tale intervallo la funzione assume valori di segno diverso. Poiché tende a $-\infty$ per $x \to 0^+$ ci sarà un punto che dista da 0 per meno di un certo δ opportuno in cui la funzione ha un valore negativo, e poiché per $x \to 1^-$ tende a $e^{-1} + \frac{\pi}{4}$ per il teor. della permanenza del segno ci sarà un punto che dista da 1 per meno di un certo δ (diverso dal primo) in cui la funzione assume valore positivo.
EF: pochi si sono occupati di prendere l'intervallo chiuso contenuto in quello aperto, e pochi hanno effettivamente calcolato la funzione in due punti in cui assumeva segno diverso.

6. Dire se è vero o falso il seguente asserto: "La derivata di una funzione pari è una funzione pari". Se sì dimostrarlo, se no, trovare un controesempio.
   SOL.- Chiaramente la derivata di una funzione pari non è pari, ma invece è dispari. Infatti, essendo $f(x) = f(-x)$, derivando ambo i membri (il secondo come funzione composta) si ha $f'(x) = f'(-x)(-1) = -f'(-x)$. Bastava comunque un controesempio, e molti hanno scelto $D(\cos x) = -\sin x$ o $D(x^4) = 4x^3$.

7. Le funzioni

$$f_1(x) = x, \qquad f_2(x) = \sin x, \qquad f_3(x) = e^x - 1$$

   hanno nel punto $x = 0$ la stessa tangente. Perché?
   SOL.- Hanno la stessa derivata (y=x), e tutte passano per il punto $(0,0)$.
   EF: vari hanno creduto che bastasse verificare che la derivata è la stessa per garantire che anche la tangente è la stessa, mentre si può dire soltanto che le tangenti sono parallele; ci vuole che passino anche per lo stesso punto.

8. Dire se sono veri o falsi i seguenti asserti, giustificando la risposta:
   - Una funzione continua in un punto x_0 è derivabile in quel punto.
   - Una funzione derivabile in un punto x_0 è continua in quel punto.

   SOL.- Il primo è falso, un controesempioè $f(x) = |x|$ oppure una funzione il cui grafico ammette un flesso a tangente verticale; il secondo è vero, vd. teor. 50.
   EF: sul secondo asserto vari hanno creduto che la cosa sia ovvia e hanno scritto che, se esiste il limite del rapporto incrementale, ovviamente esiste il limite della funzione per $x \to x_0$. In realtà è un po' meno semplice di così: se il limite del rapporto è finito, dato che il denominatore è un infinitesimo (del primo ordine) per $x \to x_0$, deve

essere un infinitesimo (almeno del primo ordine) anche il numeratore, e ciò è la definizione di continuità. Alcuni hanno invertito i due asserti dicendo che era falso quello vero e vero quello falso.

9. Si dia la definizione di *funzione crescente*.
   Una funzione composta di due funzioni crescenti è crescente? Se sì, dimostrarlo, se no, trovare un controesempio.
   SOL.- Per la def., vd § 2.4. Una funzione f composta di due funzioni g e h entrambi crescenti è crescente. Infatti, se $a < b$ è $g(a) \leq g(b)$; a sua volta è $h(g(a)) \leq h(g(b))$ e quindi per la composta risulta $f(a) \leq f(b)$.
   EF: molti credono di dimostrare un teorema presentando un esempio nel quale sono verificate sia l'ipotesi che la tesi. La tesi deve verificarsi in tutti i casi.

10. Enunciare la regola di L'Hôpital nel caso $\frac{0}{0}$.
   SOL.- Teor. 60, p. 170.
   EF: molti hanno scambiato ipotesi con tesi; molti non hanno capito che l'esistena del limite del rapporto tra le derivate è un'ipotesi e che l'affermazione che esiste il limite del rapporto tra le funzioni è una parte della tesi (la seconda parte, che i due limiti sono uguali, è stata detta giusta da quasi tutti).

Tema C

1. Si dia la definizione dell'espressione $\lim_{x\to+\infty} = -\infty$ e si abbozi il grafico di una funzione che goda di questa proprietà.
   SOL.- Def. 30, p. 81.
   EF: frequentemente è stato confuso il numero scelto sull'asse y con quello sulle x. A volte è stato tracciato un grafico che invece andava a $+\infty$.

2. Si traccino, al variare del parametro reale e positivo k, i grafici delle funzioni seguenti:
   $$f(x) = x^{-k}$$
   Hanno un massimo e un minimo assoluti sull'intervallo $[1, 2]$. Perché?
   SOL.- Essendo k reale e positivo, le funzioni sono definite solo per $x > 0$, vanno a $+\infty$ per $x \to 0^+$ e a 0 per $x \to +\infty$; si incontrao tutte nel punto $(1, 1)$; per $k = 1$ è un ramo di iperbole equilatera, per $k > 1$ si schiacciano di pi sull'asse delle x e di meno su quello delle y; se $k < 1$ è il viceversa. Essendo funzioni continue, hanno massimo e minimo in ogni intervallo chiuso e limitato, e quindi anche in $[1, 2]$.
   EF: molti hanno parlato di k pari e dispari, mentre non sono interi,

e hanno fatto grafici anche nel 2o e 3o quadrante; vari hanno creduto che se $k > 1$ le iperboli si schiacciassero su entrambi gli assi più dell'iperbole equilatera (cioè hanno fatto i grafici non di $f(x) = x^{-k}$, ma di $f(x) = kx^{-1}$).

3. Si tracci il grafico delle seguenti funzioni:

$$\cos x, \qquad \cos|x|, \qquad |\cos x|, \qquad |\cos|x||$$

Tra tali funzioni ce ne sono di pari? Giustificare la risposta.
SOL.- Sono pari tutte, la prima e la seconda coincidono, e quindi anche tra loro la terza e la quarta, che sono positive entrambe, ed hanno periodicità π.
EF: alcuni hanno fatto grafici della terza e quarta con parti negative.

4. La funzione

$$f(x) = x + e^{-x} + \arctan x - \frac{3}{2}$$

si annulla certamente in un punto dell'intervallo chiuso $[0, 1]$. Perché?
SOL. La funzione vale $-\frac{1}{2}$ in 0 ed $e + \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} > 0$ in 1; per il teor. degli zeri l'asserto è dimostrato.

5. Le funzioni $\cos x$, $x\sin^2 x$, $\arctan^2 x$ hanno nel punto $x = 0$ la stessa derivata? Hanno nel punto $x = 0$ la stessa tangente? Giustificare le risposte.
SOL.- Hanno la stessa derivata che è 0, ma la prima ha tangente $y = 1$, le altre hanno tangente $y = 0$.
EF: vari hanno creduto che l'avere la stessa derivata in un punto garantisca la stessa tangente, mentre deve anche passare per lo stesso punto.

6. Studiare la funzione

$$f(x) = \frac{2x^3 + x^2}{x^2 - 9}$$

(insieme di definizione, immagine, limiti, eventuali massimi e minimi, crescenza e decrescenza, continuità e derivabilità, eventuali attacchi, eventuali asintoti, abbozzo del grafico)
SOL.- Non è definita in $x = \pm 3$, e le rette $x = \pm 3$ sono asintoti verticali. In un intorno di $x = 3$ il numeratore è positivo, per cui è $\lim_{x\to 3^+} = +\infty$ e $\lim_{x\to 3^-} = -\infty$. In un intorno di $x = -3$ il numeratore è negativo, e quindi è $\lim_{x\to -3^+} = +\infty$ e $\lim_{x\to -3^-} = -\infty$. Per $x \to +\infty$ è $f(x) \to +\infty$ e per $x \to -\infty$ è $f(x) \to -\infty$. C'è un asintoto obliquo completo $y = 2x + 1$. La funzione si annulla in $x = 0$ e in $x = -\frac{1}{2}$. Vicino allo 0 la funzione si comporta come la parabola $-\frac{2}{9}x^2$, e quindi in $x = 0$ c'è un massimo relativo che vale 0; tra $x = -\frac{1}{2}$ e $x = 0$, punti in cui la funzione vale 0 deve esserci un punto in cui la funzione ha derivata nulla, e dove ovviamente c'è un

minimo. Il grafico ha quindi tre rami: a sinistra di $x = -3$ il grafico è compreso nell'angolo limitato dall'asintoto $y = 2x + 1$ e dall'asintoto verticale $x = -3$; tra -3 e +3 la funzione è decrescente, passa per lo 0 in $x = -\frac{1}{2}$, ha un minimo relativo, poi è crescente fino all'origine, dove ha un massimo relativo, e poi è decrescente fino ad $x = -3$; il terzo ramo è nell'angolo limitato dall'asintoto verticale $x = 3$ e quello obliquo $y = 2x + 1$.
EF: di tutti i tipi. Pochi hanno visto il comportamento simile ad una parabole concava in un intorno di $x = 0$, pochi hanno saputo annullare la derivata usando l'intersezione dei grafici, pochi hanno saputo vedere dove erano i rami al di fuori dell'intervallo $-3, 3$.

7. Dire se è vero o falso il seguente asserto: "La derivata di una funzione dispari è una funzione dispari". Se sì, dimostrarlo, se no, trovare un controesempio.
   SOL.- La derivata di una funzione dispari non è dispari, ma è pari (vd. per analogia Tema B). Comunque qualsiasi controesempio andava bene, sia il seno con derivata il coseno, sia un monomio di grado dispari con derivata un monomiodi grado pari.

8. Dare un esempio di una funzione che non ha limite, né finito né infinito, né destro né sinistro per $x \to 0$.
   SOL.- Ad es. fig. 3.4, p. 75, a sinistra, che raffigura la funzione dell formula (3.11).
   EF: alcuni hanno citato come esempio il seno, che invece non ha limite per $x \to \infty$, non per $x \to 0$. Alcuni hanno dato un esempio scarsamente significativo, cioè di una funzione che on è definta in un intorno dello 0, e quindi ovviamente non ha neppure senso parlare di limite per $x \to 0$.

9. Dire se sono veri o falsi i seguenti asserti, giustificando la risposta:

   - Se una funzione derivabile $f(x)$ ha derivata $f'(x) > 0$ per ogni punto x di un intervallo $[a, b]$, allora è crescente in $[a, b]$.
   - Se una funzione derivabile $f(x)$ è crescente nell'intervallo $[a, b]$, allora $\forall x \in [a, b]$ è $f'(x) > 0$.

   SOL.- Il primo asserto è vero (Corollario 58, p. 167); il secondo è falso: risulterebbe vero se fosse scritto $f'(x) \geq 0$.
   EF: pochissimi hanno dimostrato il corollario, come invece era richiesto. Vari hanno detto che era vero anche il secondo asserto, dicendo che se non fosse stato vero, ciò contraddiceva il primo, oppure che se il rapporto incrementale era sempre positivo, tale era anche il suo limite, mentre il limite è positivo *o nullo*.

10. Si enunci il teor. di Rolle.
SOL.- Teor. 54, p. 164.

Tema D

1. Si dia la definizione dell'espressione $\lim_{x\to-\infty} = -\infty$ e si abbozzi il grafico di una funzione che goda di questa proprietà.
SOL.- È una definizione lasciata al lettore come esercizio (p. 81). Si dice che il limite di $f(x)$ per $x \to -\infty$ è $-\infty$ se per ogni numero reale $M > 0$ si può trovare un numero reale $\delta > 0$ tale che la disuguaglianza $f(x) < -M$ è verificata per ogni $x > -\delta$.
EF: confusioni come per la prima domanda degli altri temi.

2. Si studi la funzione
$$f(x) = \lg \sqrt{\sin x}$$
SOL.- È una funzione periodica di periodo 2π, definita soltanto negli intervalli $[2K\pi, (2K+1)\pi]$. I limiti per x che tende agli estremi degli intervalli sono tutti $-\infty$. La derivata si annulla dove si annulla il coseno, cioè nei punti $\frac{\pi}{2} + 2k\pi$: si tratta di massimi. Non ci sono flessi.

3. Se una funzione derivabile è periodica, la sua derivata è ancora periodica? Se sì, dimostrarlo, se no, trovare un controesempio.
SOL.- La derivata è ancora periodica. Infatti se T è il periodo, è $f(T+x) = f(x)$ e derivando entrambi i membri abbiamo (il primo membro è una funzione composta): $f'(x+T) \cdot 1 = f'(x)$.
EF: molti hanno creduto di dimostrare l'asserto presentando l'esempio delle funzioni trigonometriche, mentre un teorema generale non si dimostra presentando un esempio in cui l'ipotesi e la tesi sono verificate. Altri hanno negato l'assetrto presentando esempi errati (ad es. che la derivata della tangente fosse $\frac{1}{1+x^2}$, che è invece la derivata dell'arcotangente, che non è periodica.

4. Si tracci il grafico delle funzioni
$$\sin(x-5) \qquad \sin|x-5| \qquad |\sin(x-5)| \qquad |\sin|x-5||$$
SOL.- Si traccino i grafici ponendo x al posto di $x-5$, e poi si traslino ponendo l'asse delle ordinate nel punto $x = -5$. La terza e la quarta funzione risultano uguali. Si noti che è $-2\pi < -5 < \pi$.
EF: molti hanno creduto che il modulo indicasse una simmetria rispetto all'asse delle x, mentre la indica rispetto alla retta $x = 5$. Altri hanno creduto che si trattasse della funzione $\sin x + 5$.

5. La funzione $f(x) = \frac{1}{x}$ assume valori positivi e negativi, eppure non assume mai il valore 0. Questo è in contraddizione col teorema di "tutti i valori compresi"? Perché?
SOL.- La situazione *non* è in contraddizione col teor. citato, il quale ha tra le ipotesi che la funzione sia continua e definita su un intervallo. Invece $\frac{1}{x}$ *non* è definta su un intervallo, ma sull'unione di due intervalli (peraltro illimitati, cioè due semirette).
EF: molti hanno scritto che la contraddizione non c'è perché la f non è continua nello 0. Ciò è errato: la f è continua *dappertutto dove è definita*, solo che il suo insieme di definizione non è un intervallo. Altri hanno detto che c'è contraddizione, mentre dovevano dire che non è verificata la tesi, ma non essendo verificata l'ipotesi, non c'è contraddizione.

6. Le funzioni $\cos x$, x^2+1, $-x^2+1$, $\cosh x$ hanno massimi assoluti? hanno minimi assoluti? Se sì, dove? Come si fa a distinguere un massimo da un minimo?
SOL.- La prima funzione ha infiniti massimi e infiniti minimi assoluti che valgono 1, la seconda ha minimo (assoluto) in $x = 0$ che vale 1 e non ha massimo, la terza ha massimo (assoluto) in $x = 0$ che vale 1 e non ha minimo, la quarta ha minimo (assoluto) in $x = 0$ che vale 1 e non ha massimo. Un massimo si distingue da un minimo o verificando la definizione, o, *nel caso che la funzione sia derivabile*, guardando il segno della derivata: se prima di x_0 la derivata è positiva e poi negativa, vuole dir che la funzione prima cresce e poi cala, e quindi c'è un massimo; se è prima negativa e poi positiva c'è un minimo. Se c'è la derivata seconda e questa, nei punti in cui si è annullata la derivata prima, è positiva, si ha un minimo, se è negativa si ha un massimo.
EF: molti credono che il massimo (o minimo) non sia assoluto se ci sono molti punti di massimo (o minimo) come nel coseno. Invece il *massimo assoluto* si distingue dal *massimo relativo* perché nel primo è $f(x_0) \geq f(x)$ per qualunque x, mentre nel secondo la relazione $f(x_0) \geq f(x)$ è verificata solo per gli x di un interno opportuno di x_0. Altri nel distinguere il massimo dal minimo hanno chiamato in causa la derivata e il suo segno senza premettere che la funzione debba essere derivabile.

7. Enunciare il teor. di Lagrange (o del valor medio).
SOL. Teor. 55, p. 166.

8. Dire se sono veri o falsi i seguenti asserti, giustificando la risposta:

   - Una funzione continua in un punto x_0 è derivabile in quel punto.
   - Una funzione derivabile in un punto x_0 è continua in quel punto.
     SOL.- Vd. Tema B.

9. Come si risolvono i casi di indeterminazione del tipo $f(x)^{g(x)}$ quando $f(x) \to 1$ e $g(x) \to \infty$? Proporre un caso concreto in cui si verifica questa situazione e risolverlo.
   SOL. Si pone $f(x)^{g(x)} = e^{g(x)\cdot \lg f(x)}$ e l'esponente presenta un cas di indeterminazione del tipo $\infty \cdot 0$. Se si sa risolvere quest'ultimo, poi sfruttando la continuità dell'esponenziale, si è risolto il primo limite. Un esempio può essere $f(x) = x^{\frac{1}{x}}$.
   EF: molti hanno appena accennato alla prima posizione; altri hanno presentato come casi concreti del tipo 1^∞ situazioni che non sono affatto di quel tipo, e addirittura non sono casi di indeterminazione.

10. Una funzione composta di una funzione crescente e di una decrescente è crescente? è decrescente? non gode né dell'una né dell'altra proprioetà? Giustificare la propria risposta con dimostrazioni o controesempi.
    SOL.- È decrescente. Infatti supponiamo che sia $f(x) = g(h(x))$, e che h si crescente e g decrescente. Allora se $a < b$ è $h(a) \leq h(b)$, da cui, data la decrescenza di g, risulta $f(a) = g(h(a)) \geq g(h(b)) = f(b)$.
    EF: appellarsi alla "regola dei segni" senza dimostrare nulla. Altri hanno scritto che non si poteva dire a priori.