MATEMATICA 1 a. a. 2006-2007

Ingegneria elettrotecnica e Ingegneria energetica

Prova d'esame del 13.12.2006 Tempo concesso: 2 ore e mezza

Abbozzo di soluzioni. Le pagine si riferiscono al libro di testo; EF indica gli errori più frequenti.

N. B. - Le risposte vanno giustificate mediante dimostrazioni o controesempi

Tema A

1. Si dia la definizione dell'espressione $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ e si abbozzi il grafico di una funzione che goda di questa proprietà.
   EF: vari hanno semplicemente scritto a parole la lettura della formula; vari altri hanno sistematicamente confuso M con δ. Il sapere la definizione di limite è assoutamente essenziale.

2. Si studi la funzione
   $$f(x) = \frac{|x^2 - x|}{x+1}$$
   (ins. di def., limiti, continuità, derivabilitià, massimi, minimi, crescenza, flessi e grafico).
   Sol.- pp. 207-209
   EF: sbaglio nello spezzare il modulo (frequentissimo), e quindi sbaglio nei punti di non derivabilità (0 e 1), sbagli nel segno, sbagli nel derivare il modulo (si spezza la funzione e si derivano i singoli pezzi).

3. Dimostrare che se una funzione è pari la sua derivata è dispari, e se invece la funzione è dispari la sua derivata è pari.
   Sol.- Già dato nei compitini e già spiegato nelle soluzioni in rete: $f(-x) = f(x) \Longrightarrow f'(-x) = -f'(x)$.
   EF: moltissimi hanno proposto esempi (disolito polinomi o funzioni trigonometriche) credendo che basti citare un esempio che verifica ipotesi e tesi per dimostrare un teorema.

4. Si tracci il grafico delle funzioni
   $$\lg(x-5) \qquad \lg|x-5| \qquad |\lg(x-5)| \qquad |\lg|x-5||$$
   EF: molti credono che il modulo porti qualche cosa di non derivabile nel punto $x = -5$; altri fanno grafici di funzione concave mentre avendo un asintoto verticale non possono essere che convesse.

5. Si enunci il teorema di "tutti i valori compresi" e si faccia un esempio in cui, pur cadendo una delle ipotesi, resta valida la tesi.
   Sol.- Basta prendere una funzione discontinua su un intervallo la cui immagine sia un intervallo, oppure il seno su una coppia di intervalli ben disgiunti ma ampi almeno 2π: l'immagine è sempre l'intervallo $[-1, 1]$.
   EF: alcuni hanno fatto l'esempio in cui cadeva un'ipotesi e cadeva anche la tesi.

6. Si dica in quali intervalli è sommabile la funzione
   $$f(x) = \frac{1}{\sin x}\, dx$$

giustificando la risposta.
Se ne trovino quindi le primitive (si ricorda che è $\sin x = \sqrt{1-\cos^2 x}$ e si consiglia la sostituzione $\cos x = t$ da cui $dx = \dots$)
Sol.- Si devono prendere intervalli chiusi che escludano i punti in cui il seno si annulla, perchè dove tende a 0 il seno ci tende come x e quindi non è sommabile. Per il calcolo vd. p. 57.
EF: vari hanno detto che l'integranda non era sommabile, e certamente non lo è su tutti gli intervalli, ma la domanda era *dove* la funzione è sommabile.

7. Sia $f(x)$ una funzione derivabile in $[a.b]$, sia x_0 un punto interno di $[a,b]$, e sia $f'(x_0) = 0$.
   Dire se sono veri o falsi i seguenti asserti, giustificando la risposta:
   a) La funzione ha un massimo relativo oppure un minimo relativo nel punto x_0.
   b) La funzione è certamente continua nel punto x_0.
   c) La funzione ha un massimo assoluto o un minimo assoluto nel punto x_0.
   d) Se non esiste la derivata seconda in x_0 è impossibile distinguere se c'è un massimo o un minimo.
   e) La funzione può essere strettamente decrescente in tutto $[a,b]$
   Sol.- L'annullarsi della derivata in un punto interno è condizione necessaria per il massimo o il minimo, ma non sufficiente, quindi erano false la a) e la c) (se un massimo non è nemmeno relativo certo non è assoluto). La b) è vera, la d) è falsa perché la differenza tra massimo e minimo si può studiare studiando il segno della derivata prima, ed e) è falsa: controesempio: $f(x) = -x^3$.
   EF: molti credono che l'annullarsi della derivata in un punto assicuri l'esistenza di un massimo o minimo; controesempio $f(x) = x^3$ in $x = 0$.

8. Si studi la funzione $f(x) = x^{\lg x}$ in un intorno destro di $x = 0$ (limite, eventuale prolungabilità per continuità, attacco).
   Sol.- È
   $$x^{\lg x} = e^{\lg x^{\lg x}} = e^{\lg x \cdot \lg x} = e^{\lg^2 x}$$
   e per $x \to 0$ il limite è $+\infty$. Quindi né prolungabilità, né attacco, dato che anche la derivata tende a $+\infty$.
   EF: vari non hanno visto che il quadrato del logaritmo è positivo, vari hanno fatto venire 0.

9. Si dia la definizione di *parte principale* di un infinitesimo rispetto all'infinitesimo di confronto $x - x_0$.
   Si scrivano quindi i primi tre termini dell'infinitesimo $x - \sin x + 1 - \cos x$ per $x \to 0$ e se ne indichi la parte principale.
   Sol.- Le due parti principali di x e $\sin x$ si eliminano a vicenda, e resta $\frac{x^3}{3!}$; resta quindi la parte principale di $1 - \cos x$ che è $\frac{x^2}{2}$, che è quindi la parte principale dell'intero infinitesmo.
   EF: vari non hanno capito cosa sia la parte principale, e hanno fatto venire 0 tutto.

10. Si enunci e si dimostri il teorema di Torricelli.
    EF: vari sono passati troppo rapidamente sull'applicazione del teorema della media, facendo il limite per $x_h \to x$ senza giustificarlo bene.

Tema B

1. Si dia la definizione dell'espressione $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -3$ e si abbozzi il grafico di una funzione che goda di questa proprietà.

2. Si studi la funzione
$$f(x) = \lg\left|\frac{(x+2)^2}{x-1}\right|$$
(ins. di def., limiti, continuità, derivabilitià, massimi, minimi, crescenza, flessi e grafico).
Sol.- pp. 209-210.
EF: di tutti i tipi, principalmente incapacità di risolvere il modulo e di derivarlo.

3. Dimostrare che se una funzione è dispari la sua derivata è pari, e se invece la funzione è pari la sua derivata è dispari.
Sol.- vd tema A.

4. Si tracci il grafico delle funzioni
$$\arcsin(x-5) \qquad \arcsin|x-5| \qquad |\arcsin(x-5)| \qquad |\arcsin|x-5||$$
EF: molti hanno creduto che il modulo comportasse l'esistenza della funzione nell'intorno di $x = -5$, mentre chiaramente tutte quelle funzione esistono soltanto quando l'argomento dell'arcoseno è compreso tra -1 e 1. Altri hanno disegnato cose che non sono funzioni, invertendo il seno *su tutta la retta*!!!

5. Si enunci il teorema di Weierstrass e si citi una dimostrazione in cui è stato usato.
Sol.- Ad es. il teor. di Rolle.

6. Sia $f(x)$ una funzione derivabile due volte in $[a.b]$, sia x_0 un punto interno di $[a, b]$, e sia $f''(x_0) = 0$.
Dire se sono veri o falsi i seguenti asserti, giustificando la risposta:
a) La funzione ha un massimo relativo oppure un minimo relativo nel punto x_0.
b) La funzione è certamente continua nel punto x_0.
c) La funzione ha un flesso nel punto x_0.
d) La funzione può essere strettamente decrescente in tutto $[a, b]$.
e) Se nel punto x_0 si annulla anche la derivata prima cambia la risposta alla domanda a)? e cambia la risposta alla domanda d)?
Sol.- Sono vere la b), perché una funzione derivabile è certamente continua, e la d) (ad es. $-x^3$). La a) è falsa, perché l'esistenza del massimo o minimo può tutt'al più avere relazione con la derivata prima, la c) è falsa (controes. x^4); se si annulla anche la derivata prima non cambiano le risposte né alla a) né alla d) (controesempio: ancora $-x^3$).
EF: di tutti i generi, ma specialmente il supporre che se si annulla la f'' si debba per forza avere un flesso. È vero il viceversa!!

7. Si studi la funzione $f(x) = x^{\lg x}$ in un intorno destro di $x = 0$ (limite, eventuale prolungabilità per continuità, attacco).
Sol.- Vd. tema A.

8. Si dia la definizione di *parte principale* di un infinitesimo rispetto all'infinitesimo di confronto $x - x_0$.
   Si scrivano quindi i primi tre termini dell'infinitesimo $x - \sin x + 1 - \cos x$ per $x \to 0$ e se ne indichi la parte principale.
   Sol.- Vd. tema A

9. Si enunci e si dimostri il teorema di Torricelli.
   Sol.- Vd tema A.

10. Si calcoli l'integrale generalizzato

$$\int_0^2 \lg(4 - x^2)\ dx$$

   Sol.- Vd. pp. 291-292.