

MATEMATICA 1 - Ing. Elettrotecnica e Ing. Energetica
Esercitazione del 5.11.2006

Svolgere **due esercizi** per ogni gruppo

1. Si dica cosa significa $\lim_{x \rightarrow 5^-} f(x) = -\infty$ e si abbozzi il grafico di una funzione che goda di tale proprietà.
2. Si dica cosa significa $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -2$ e si abbozzi il grafico di una funzione che goda di tale proprietà.

3. Si studi la funzione (dominio, immagine, crescita, massimi, minimi, eventuali attacchi, concavità, asintoti, abbozzo del grafico)

$$f(x) = \frac{2x^3 + x^2}{x^2 - 4}$$

4. Si studi la funzione $f(x) = x + \sqrt{x^2 + 1}$.
5. Si disegnino i grafici delle funzioni

$$f(x) = |\lg(x + 2)|, \quad f(x) = \lg(x + 2), \quad f(x) = \lg|x + 2|$$

6. Si disegnino i grafici delle funzioni

$$f(x) = \sin x, \quad f(x) = |\sin x|, \quad f(x) = \sin|x|$$

Qualcuna di queste è pari? è dispari?

7. Si studi la funzione $f(x) = e^{\sqrt{\sin x}}$. È periodica? Se sì, dirne il periodo.
8. Si studi la funzione

$$f(x) = xe^{-x^2}$$

Se la si considera ristretta alla semiretta $[1, +\infty]$ ha massimo e minimo assoluto? C'è contraddizione con il teorema di Weierstrass?

9. Data la funzione $\frac{e^x + 2}{e^x - 1}$ calcolarne sia il limite per $x \rightarrow +\infty$ sia il limite per $x \rightarrow -\infty$.
10. Studiare la funzione $f(x) = x - 8\sqrt{x} + 2\lg x$
11. Studiare la funzione $f(x) = x\sqrt{1 - x^2}$

12. Si trovi almeno uno dei punti la cui esistenza è assicurata dal teor. di Lagrange (o del valor medio) per la funzione $f(x) = x^3 - x^2 + 3$ dapprima sull'intervallo $[0, 2]$ e poi sull'intervallo $[0, 3]$.

13. Si dimostri che un polinomio di grado positivo e pari ha almeno un punto di massimo o di minimo relativo.
14. Si enunci il teor. di Weierstrass.
15. Qual è il polinomio di grado 3 che meglio approssima la funzione $f(x) = x^3 e^{-x}$ in un intorno di $x = 0$?
16. Quale è il polinomio di grado 2 che meglio approssima la funzione $f(x) = 1 - \cos x$ in un intorno di $x = 0$?
17. Si enunci la regola di L'Hôpital nel caso $\frac{\infty}{\infty}$ per $x \rightarrow +\infty$ e si dia un esempio di rapporto tra funzioni in cui questa regola porta ad un risultato.

18. Calcolare

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + \sin x}{x}$$

Ci è di aiuto la regola di L'Hôpital? Perché?

Dire se sono veri o falsi i seguenti asserti, giustificando la risposta (per asserire che un fatto è vero bisogna dimostrarlo, per asserire che è falso basta esporre un controesempio):

19. Se $f(x)$ possiede la derivata seconda in ogni punto, e nel punto x_0 è $f''(x_0) = 0$ il grafico della f ha un flesso in x_0 .
20. Se $f(x)$ è derivabile in ogni punto, ed è $\forall x \in [a, b] f'(x) > 0$ allora la f è strettamente crescente in $[a, b]$.
21. Se $f(x)$ è derivabile in ogni punto, e la f è strettamente crescente in $[a, b]$ allora è $\forall x \in [a, b] f'(x) > 0$.
22. Una funzione continua in un punto è anche derivabile in quel punto.
23. Una funzione derivabile in un punto è anche continua in quel punto.

24. Come è stato definito il numero e ?
25. Come si risolvono i limiti nei casi di indeterminazione del tipo $f(x)^{g(x)}$ quando $f(x) \rightarrow 1$ e $g(x) \rightarrow \infty$?
Esporre un caso concreto in cui si verifica questa situazione.
26. Una funzione crescente composta con una funzione crescente è ancora una funzione crescente? Perché?
E se una delle due è decrescente, cosa si può dire della funzione composta?