MATEMATICA 1 - Ing. Elettrotecnica e Ing. Energetica
Esercitazione dell'1.12.2006
Svolgere **due esercizi** per ogni gruppo. **Le risposte devono essere giustificate**

1. Sia $f''(x)$ continua in $[0,1]$ e tale che $f(0) = f(1) = e,\ f'(1) = \pi$ allora
$$\int_0^1 x f''(x)\, dx =$$
a) π b) $\pi + e$ c) e d) $\pi + 2e$

2. Calcolare
$$\int_2^3 \arctan \frac{1}{x-1}\, dx$$
(si integra per parti prendendo 1 come fattore differenziale).

3. Dire se esiste finito l'integrale
$$\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\, dx$$
e in caso affermativo calcolarlo.

4. Calcolare
$$\int \frac{e^x}{e^{2x}+1}\, dx$$
Tra queste primitive ce n'è una che vale 0 nel punto $x = 0$?
Esiste l'integrale definito $\int_0^1 \frac{e^x}{e^{2x}+1}\, dx$?

5. Si dica se la funzione
$$f(x) = \frac{x + e^{-x}}{x^2 + \lg x}$$
è sommabile da 0 a 2 e da 2 a $= \infty$, giustificando le risposte.
****

6. Studiare la funzione
$$f(x) = \arctan \frac{x-1}{x+1}$$
(ins. di def., limiti, continuità, derivabilità, crescenza, massimi, minimi, asintoti, grafico)

7. Studiare la funzione
$$f(x) = \cos 2x - x$$

8. Studiare la funzione
$$f(x) = \arcsin \sqrt{2x - x^2}$$

****

9. Enunciare e dimostrare il teor. della media integrale.

10. Enunciare e dimostrare il teorema di Torricelli.

11. Una funzione derivabile su un intervallo limitato $[a, b]$ ha sempre anche integrale finito su tale intervallo? Se sì dire perché, se no trovare un controesempio.

12. Una funzione pari ha integrale uguale a 2 nell'intervallo $[a, b]$ con $a,\ b > 0$. Dire se sono veri o falsi i seguenti asserti:
    a) l'integrale sull'intervallo $[-a, -b]$ vale anch'esso 2.
    b) l'integrale sull'intervallo $[-a, -b]$ vale -2.
    c) l'integrale sull'intervallo $[-a, -b]$ vale 0.
    d) non si può dire nulla su quanto eventualmente valga l'integrale sull'intervallo $[-a, -b]$.
    ****

13. Se due funzioni f e g tendono entrambe a 2 per $x \to 4$ cosa si può dire del seguente rapporto? È applicabile la regola di L'Hôpital?
$$\lim_{x \to 4} \frac{f(x)}{g(x)} \ ?$$

14. Due infinitesimi f e g sono entrambi di ordine 2 per $x \to 1$.
    Qual è l'infinitesimo campione rispetto al quale si verificano gli ordini?
    La funzione $f \cdot g$ è ancora un infinitesimo? Se sì di che ordine?
    E la funzione $f + g$ è ancora un infinitesimo? Se sì, cosa si può dire sull'ordine?

15. Si dica cosa significa che un infinitesimo *non è confrontabile* con un infinitesimo scelto come campione.
    Quindi si faccia un esempio di un infinitesimo non confrontabile con un infinitesimo campione.

16. Si scriva la formula di MacLaurin per le funzioni $\sin x,\ \cos x,\ \tan x,\ e^x$.
    ****

17. Si dica se la funzione
$$f(x) = |x| \cdot x$$
    è derivabile nel punto $x = 0$, se ha integrale finito tra -1 e +1, se è un infinitesimo per $x \to 0$ ed eventualmente di che ordine.

18. Data una funzione $f(x) = g(x) + h(x)$ che ha integrale definito in un intervallo $[a, b]$, dire se sono veri o falsi (con dimostrazioni e controesempi) i seguenti asserti: a) la funzione è limitata su $[a,\ b]$ b) hanno integrale finito su $[a, b]$ anche le funzioni $g(x)$ ed $f(x)$? c) la funzione è derivabile su $[a,\ b]$ d) la funzione va all'infinito per $x \to a$ di ordine minore di 1.