MATEMATICA 1 - Ing. Elettrotecnica e Ing. Energetica
Esercitazione dell'1.12.2006
Svolgere **due esercizi** per ogni gruppo. **Le risposte devono essere giustificate**
Abbozzo di soluzioni; i numeri si riferiscono alla pagine del libro di testo: G. Artico, *Istituzioni di matematiche*, ed. Progetto, 2005.

1. Sia $f''(x)$ continua in $[0,1]$ e tale che $f(0) = f(1) = e$, $f'(1) = \pi$ allora

$$\int_0^1 xf''(x)\ dx =$$

a) π b) $\pi + e$ c) e d) $\pi + 2e$

Sol.- a): si integra una volta per parti prendendo x come fattore finito:

$$\big[xf'(x)\big]_0^1 - \int_0^1 f'(x)\ dx = \pi - [f(x)]_e^e = \pi.$$

2. Calcolare

$$\int_2^3 \arctan \frac{1}{x-1}\ dx$$

(si integra per parti prendendo 1 come fattore differenziale):

$$\left[x \arctan \frac{1}{x-1}\right]_2^3 + \int_2^3 \frac{x\ dx}{x^2 - 2x + 2}$$

Nell'ultimo integrale, aggiungendo e togliendo 2 al numeratore e dividendo opportunamente per 2 si ottiene la derivata del denominatore, e poi resta un altro termine le cui primitive sono $\arctan(x-1) + c$. Fatti tutti i calcoli risulta:

$$2 \arctan \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \lg \frac{5}{2} - \frac{\pi}{4}.$$

3. Dire se esiste finito l'integrale

$$\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\ dx$$

e in caso affermativo calcolarlo.

Sol.- Esiste finito, perché la funzione è definita solo per $|x| < 1$ e la si può prolungare per continuità in 0, e in 1 si può dare un valore qualsiasi; in 0 la f prolungata risulta continua, pertanto va all'infinito solo per $x \to 1$. Essendo $\sqrt{1-x^2} = \sqrt{(x-1)(x+1)}$, il secondo fattore sotto la radice va a 0, e quindi la funzione va all'infinito come

ci va $\frac{1}{\sqrt{x}}$ in un intorno di 0, e quindi risulta sommabile.
Una primitiva dell'integranda è $g(x) = -\sqrt{1-x^2}$; calcolando quindi

$$\lim_{k\to+\infty} \left[-\sqrt{1-x^2}\right]_0^{1-\frac{1}{k}} = 1.$$

4. Calcolare

$$\int \frac{e^x}{e^{2x}+1}\, dx$$

Tra queste primitive ce n'è una che vale 0 nel punto $x = 0$?
Esiste l'integrale definito $\int_0^1 \frac{e^x}{e^{2x}+1}\, dx$?
Sol.- Si pone $e^x = t$, da cui

$$e^{2x} = t^2 \longrightarrow 2x = \lg t^2 \longrightarrow x = \lg t \longrightarrow dx = \frac{1}{t}\, dt$$

$$\int \frac{e^x}{e^{2x}+1}\, dx = \int \frac{t}{1+t^2}\frac{1}{t}\, dt = \arctan t + c = \arctan e^x + c$$

Imponendo $e^0 + c = 0$ si ha $c = -1$, quindi $e^x - 1$ è la primitiva cercata.
L'integrale indicato esiste ovviamente, trattandosi di funzione continua su un intervallo chiuso e limitato.

5. Si dica se la funzione

$$f(x) = \frac{x + e^{-x}}{x^2 + \lg x}$$

è sommabile da 0 a 2 e da 2 a $+\infty$, giustificando le risposte.

Sol.- Così come è scritto l'esercizio, all'interno dell'intervallo $[0, 2]$ il denominatore si annulla in un punto x_0, come si vede intersecando i grafici di x^2 e $-\lg x$; il modo con cui si tagliano i grafici dice che il denominatore si annulla del primo ordine, e quindi la funzione non risulta sommabile. In realtà si tratta di un errore di battitura, il denominatore doveva essere $x^2 - \lg x$, che non si annulla mai. In questo caso, la funzione è invece sommabile nell'intervallo $[0, 2]$ perché per $x \to 0$ il numeratore tende a 1 e il denominatore tende a $-\infty$, e quindi l'intera funzione tende a 0, è addirittura prolungabile per continuità e pertanto l'integrale è finito. Non così invece nella semiretta $[2, +\infty)$ dove la funzione tende a 0 per $x \to +\infty$, ma come $\frac{1}{x}$, e quindi non è sommabile.
****

6. Studiare la funzione

$$f(x) = \arctan \frac{x-1}{x+1}$$

(ins. di def., limiti, continuità, derivabilità, crescenza, massimi, minimi, asintoti, grafico)

Sol.- Nel punto $x = -1$ la funzione non è definita, e ci sono limiti $\pm\frac{\pi}{2}$ rispettivamente da destra e da sinistra. È $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 1$. La funzione è decrescente sulle due semirette $(-\infty, -1]$ e $[1, +\infty)$ (*non* sull'insieme delle due semirette!).

7. Studiare la funzione
$$f(x) = \cos 2x - x$$
Sol.- Definita su tutto $\mathbb{R}$; per $x \to -\infty$ va a $+\infty$, per $x \to +\infty$ va a $-\infty$. Il grafico si appoggia alle rette $y = x + 1$ e $y = x - 1$, vale 1 nel punto 0, ha alternativamente massimi e minimi nei punti in cui $\sin 2x = -\frac{1}{2}$.

8. Studiare la funzione
$$f(x) = \arcsin\sqrt{2x - x^2}$$
Sol.- I.d.d.: $0 \le x \le 2$ ed è $f(0) = f(2) = 0$. La derivata è positiva in $(0, 1)$ e negativa in $(1, 2)$, va a $+\infty$ per $x \to 0^+$ e a $-\infty$ per $x \to 2^-$. In $x = 1$ c'è un punto angoloso; la f è sempre positiva e la sua immagine è $[0, \frac{pi}{2}$; il massimo è raggiunto nel punto angoloso.
****

9. Enunciare e dimostrare il teor. della media integrale.

   Sol.- Vd. p. 267.

10. Enunciare e dimostrare il teorema di Torricelli.

    Sol.- Vd. p. 268.

11. Una funzione derivabile su un intervallo limitato $[a, b]$ ha sempre anche integrale finito su tale intervallo? Se sì dire perché, se no trovare un controesempio.

    Sol.- Ovviamente sì, in quanto essendo derivabile è continua.

12. Una funzione pari ha integrale uguale a 2 nell'intervallo $[a, b]$ con $a,\ b > 0$. Dire se sono veri o falsi i seguenti asserti:
    a) l'integrale sull'intervallo $[-a, -b]$ vale anch'esso 2.
    b) l'integrale sull'intervallo $[-a, -b]$ vale -2.
    c) l'integrale sull'intervallo $[-a, -b]$ vale 0.
    d) non si può dire nulla su quanto eventualmente valga l'integrale sull'intervallo $[-a, -b]$.

    Sol.- È vera la b), perché se era $a < b$, è $-a > b$, e quindi l'integrale cambia segno. Le altre risposte contraddicono la b), e quindi sono sbagliate.
****

13. Se due funzioni f e g tendono entrambe a 2 per $x \to 4$ cosa si può dire del seguente rapporto? È applicabile la regola di L'Hôpital?

$$\lim_{x\to 4} \frac{f(x)}{g(x)} \ ?$$

Sol.- Il rapporto tende al quoziente dei limiti, che è ovviamente 1. La regola di L'Hôpital è applicabile solo ai casi di indeterminazione $\frac{0}{0}$ e $\frac{\infty}{iy}$.

14. Due infinitesimi f e g sono entrambi di ordine 2 per $x \to 1$.
Qual è l'infinitesimo campione rispetto al quale si verificano gli ordini?
La funzione $f \cdot g$ è ancora un infinitesimo? Se sì di che ordine?
E la funzione $f + g$ è ancora un infinitesimo? Se sì, cosa si può dire sull'ordine?

Sol.- L'inifinitesimo campione è $x-1$. Il prodotto è ovviamente ancora un infinitesimo, del 4o ordine. Infatti

$$\begin{cases} \lim_{x\to 1} \frac{f(x)}{(x-1)^2} = l_1 \neq 0 \\ \lim_{x\to 1} \frac{g(x)}{(x-1)^2} = l_2 \neq 0 \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \lim_{x\to 1} \frac{f(x)g(x)}{(x-1)^4} = \frac{l_1}{l_2} \neq 0.$$

La somma di due infinitesimi è ancora un infinitesimo, ma l'ordine può essere più grande ($x - \sin x$ è del 3o ordine per $x \to 0$, pur essendo la somma di due infinitesimi del primo).

15. Si dica cosa significa che un infinitesimo *non è confrontabile* con un infinitesimo scelto come campione.
Quindi si faccia un esempio di un infinitesimo non confrontabile con un infinitesimo campione.

Sol.- Un infinitesimo $f(x)$ si dice *non confrontabile* con un infinitesimo campione $g(x)$ per $x \to x_0$ se il quoziente $\frac{f}{g}$ non ha limite per $x \to x_0$.
$x \sin \frac{1}{x}$ non è confrontabile con x per $x \to 0$.

16. Si scriva la formula di MacLaurin per le funzioni $\sin x,\ \cos x,\ \tan x,\ e^x$.
****

17. Si dica se la funzione

$$f(x) = |x| \cdot x$$

è derivabile nel punto $x = 0$, se ha integrale finito tra -1 e +1, se è un infinitesimo per $x \to 0$ ed eventualmente di che ordine.

Sol.- È derivabile (esiste il limite del rapporto incrementale e risulta 0), ha integrale finito perché è continua (e tale integrale risulta nullo, perché la funzione è dispari), è un infinitesimo per $x \to 0$. L'ordine non è definito, perché è superiore al primo, in quanto il limite $\frac{f(x)}{x}$ è 0, ma non esiste limite se si divide per x^2 (viene 2 a destra e -2 a sinistra dello 0).

18. Data una funzione $f(x) = g(x) + h(x)$ che ha integrale definito in un intervallo $[a, b]$, dire se sono veri o falsi (con dimostrazioni e controesempi) i seguenti asserti:
 a) la funzione è limitata su $[a,\ b]$
 b) hanno integrale finito su $[a, b]$ anche le funzioni $g(x)$ ed $f(x)$
 c) la funzione è derivabile su $[a,\ b]$
 d) la funzione va all'infinito per $x \to a$ di ordine minore di 1.

 Sol.- La a) è falsa: esistono funzioni che hanno integrale definito pur senza essere limitate, ad es. $\frac{1}{\sqrt{x}}$ sull'intervallo $[0, 1]$ (tale funzione si può porre uguale ad un numero qualsiasi nel punto 0, in modo da ottenere una funzione definita sull'intervallo chiuso). La b) è stata stampata con un refuso: dove è scritto $f(x)$ doveva essere scritto $h(x)$. Detto questo, la b) è falsa, basta prendere una g che non abbia integrale finito, e prendere $h = -g$: la somma è la funzione nulla, che ovviamente ha integrale nullo. La c) è falsa, la derivabilità non c'entra: se una funzione è continua senza essere derivabile, l'integrale esiste finito comunque. La d) è falsa, qualsiasi funzione continua ha integrale finito senza andare all'infinito. È vero invece il viceversa: la d) implica che la f ha integrale finito. Lo implicano anche la c), perché la derivabilità implica la continuità, e anche la b), perché se due funzioni hanno integrale finito ce l'ha la somma.