M171sett.tex

MATEMATICA 1
(per elettrotecnici ed energetici)

Anno accademico 2007-2008

Prima settimana
Inizio: lunedì 2007/10/01

Introduzione al corso: indirizzo in rete, calendario, orario, ricevimento (martedì, ore 12.30).
Prerequisiti, date degli esami, modalità, appelli della sessione invernale.
Compitini per i frequentanti: 7.11 e 5.12, ore 12.30 (A-L), ore 14.00 (M-Z).

Gli appelli d'esame sono cinque: due alla fine del corso, uno in luglio, due in settembre.
I appello d'esame:
scritto: 11.12.2007, ore 9, Aula P300; inizio orale: 18.12, ore 9, Aula P4;
II appello d'esame:
scritto: 8.1.2008 ore 9 Aula P3; inizio orale 10.1, ore 9, Aula P5.

Testo: G. Artico, *Istituzioni di matematiche*, 3a ed., ed. Progetto, Padova, 2007
Per gli esercizi: G. Artico, *333 esercizi*, ed. Progetto, Padova; Antoniazzi-Pavarin-Zannol: *Esercizi di Matematica A*, ed. Progetto, 2002.

Capitolo I (pagg. 1-22; si danno per acquisiti i §§1.9 e 1.10 e le proprietà delle potenze riassunte nel riquadro di pag. 8).

Terminologia e simbologia della teoria degli insiemi: appartenenza ($\in$), unione ($\cup$), intersezione ($\cap$), sottoinsieme ($\subseteq$), sottoinsieme proprio ($\subset$), differenza ($\setminus$), complemento ($\setminus A$), differenza simmetrica ($\triangle$).
Definizione di un insieme per *estensione* (dicendo tutti gli elementi uno per uno) e per *comprensione*:

$$A = \{x : \text{ proprietà}\}$$

Esempio.- L'insieme dei numeri pari è

$$A = \{x : \text{il resto della divisione di } x \text{ per 2 è 0}\}$$

Come si è cominciato a contare: numeri naturali, loro assiomatica (accenno ai postulati di Peano). Introduzione dello 0.
Supponiamo di conoscere i numeri naturali indicati con $\mathbb{N}$, quelli interi relativi ($\mathbb{Z}$), quelli razionali ($\mathbb{Q}$), quelli reali ($\mathbb{R}$). Supponiamo anche di

conoscere le quattro operazioni elementari su tali numeri. (Attenzione: *non è definita la divisione per 0.*)

I razionali si scrivono in due modi: allineamento decimale e frazione. L'allineamento decimale si ottiene eseguendo la divisione indicata dalla frazione, e dà luogo ad un numero decimale finito oppure periodico. Il numero decimale risulta finito se il denominatore della frazione, ridotta ai minimi termini, ha fattori soltanto 2 e 5, risulta periodico se ha (anche) fattori diversi. I numeri decimali periodici sono soltanto teorici: ogni applicazione pratica tratta soltanto con numeri decimali finiti.

Frazioni che indicano lo stesso numero decimale si dicono *equivalenti*; problemi diversi possono portare a frazioni diverse, ma equivalenti. Due frazioni $\frac{a}{b}$ e $\frac{c}{d}$ risultano equivalenti se e soltanto se $a = kc$ e $b = kd$, cioè se $ad = cb$; in tale caso la coppia (a, b) si dice *proporzionale* alla coppia (c, d).

I numeri reali sono soltanto teorici: ogni applicazione pratica tratta soltanto con numeri decimali finiti.

Molti numeri reali vengono espressi con lettere, ma non sono conosciuti se non per un numero finito di cifre. Ad esempio di π si conoscono alcuni miliardi di cifre, ma non tutte: si sa però che non è un numero razionale; del pari della base e dei logaritmi naturali, ma ad esempio non si sa se e^π sia razionale o no.

Nelle applicazioni pratiche in genere si fissa a priori quale approssimazione si vuole, cioè con quante cifre decimali si vuole trattare il problema, e si tratta con numeri che hanno lo stesso numero di cifre decimali. <u>Non ha senso</u> il prodotto $\pi\sqrt{2}$ calcolato così:

$$3,141592 \cdot 1,41 = 4,42964472$$

e neppure ha senso riportare il risultato del calcolatore così:

$$3,14 \cdot 1,41 = 4,4274$$

mentre è corretta l'uguaglianza

$$3,14 \cdot 1,41 = 4,42$$

Si noti che le prime due cifre decimali così ottenute *non sono* le prime due cifre decimali migliori; infatti se si spingesse l'approssimazione alla terza cifra decimale si otterrebbe:

$$3,141 \cdot 1,414 = 4,441$$

Partendo dai *numeri naturali* si cerca di dare l'opposto nella operazione di addizione (*opposto* di a: numero tale che sommato ad a dia 0; viene indicato con $-a$) e si amplia l'insieme numerico aggiungendo i numeri negativi, ottenendo gli *interi (relativi)*. Quindi si amplia l'insieme degli interi in modo che di ogni numero intero, salvo che lo 0, esista l'inverso (*inverso di un numero a* è quel numero che moltiplicato per a dà per risultato 1), giungendo così ai*numeri razionali.* L'ampliamento ai *numeri reali* si ha costruendo sezioni tra classi di numeri razionali. Non definiremo i numeri reali, accontentandoci di sapere come si eseguono le quattro operazioni elementari su di essi. Dal punto di vista pratico, chiameremo *numero reale* un qualsiasi allineamento decimale infinito (che però potrà essere scritto soltanto arrestandosi ad una certa cifra).

Inclusione (stretta): $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.

Ordinamento: $<, >, =, \geq, \leq$ (disuguaglianza stretta, disuguaglianza larga).
2=3 falsa
$2 < 3$ vera
$2 \leq 3$ vera

Regola dei segni.

Modulo: $|x| \geq 0; |x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$. Il modulo di un numero e quello del suo opposto sono uguali, per cui qualsiasi sia il segno di x, è $|x| = |-x|$.

Attenzione ai versi delle disuguaglianze:
se $a < b$ e $c > 0$, allora $ac < bc$
se $a < b$ e $c < 0$, allora $ac > bc$
se $a < b$ allora $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$

La radice n-sima di un numero positivo r è quel numero *non negativo* a tale che elevato ad n dia r; pertanto $\sqrt{x^2} = |x|$.
$\sqrt{4} = 2$ giusta
$\sqrt{4} = \pm 2$ errata.
$\sqrt{a} = a$ è giusta solo se $a \geq 0$, è errata se $a < 0$; in questo secondo caso risulta giusta $\sqrt{a} = -a$

Non definiamo radici n-sime di numeri negativi, anche se per n dispari si potrebbero definire con una certa cautela.

Potenza: se k è intero positivo, a^k esiste per qualsiasi $a \in \mathbb{R}$; se k è intero relativo, a^k esiste se $a \neq 0$; se $k \in \mathbb{R}$, allora a^k esiste solo se $a > 0$.

Attenzione: la potenza a base reale (ovviamente positiva) e ad esponente razionale $p = \frac{m}{n}$ si definisce così:

$$a^p = a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$$

Simbolo di *sommatoria*:

$$\sum_{i=1}^{n} 4i = 4 + 4 \cdot 2 + 4 \cdot 3 + \ldots 4 \cdot n$$

$$\sum_{i=1}^{6} 2^i = 2^1 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + 2^5 + 2^6 = 2 + 4 + 8 + 16 + 32 + 64 = 126$$

$$\sum_{n=0}^{3} 5^n = 5^0 + 5^1 + 5^2 + 5^3 = 1 + 5 + 25 + 125 = 156$$

$$\sum_{k=3}^{5} x^k = x^3 + x^4 + x^5$$

$$\sum_{n=1}^{4} \frac{1}{x^n} = \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3} + \frac{1}{x^4}$$

Intervalli di una retta reale:
insiemi di punti x: $a \leq x \leq b$ (int. chiuso);
insiemi di punti x: $a < x < b$ (int. aperto);
intervallo aperto a destra, a sinistra;
semiretta chiusa, aperta, ascendente, discendente.

Il *piano* come insieme di coppie ordinate di punti (ascissa, ordinata); l'insieme di coppie ordinate di elementi presi da due insiemi diversi A e B si dice *prodotto cartesiano* di A e B e si indica con $A \times B$, con la distanza definita così:

$$\overline{P_1P_2} = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

Attenzione: se due punti stanno su una retta parallela ad un asse, ad esempio l'asse delle x, la loro distanza è data da $|x_1 - x_2|$ (analogamente $|y_1 - y_2|$).

Dato un segmento $\overline{P_1P_2}$ nel piano, il suo punto medio ha coordinate $x_m = \frac{x_1+x_2}{2}$, $y_m = \frac{y_1+y_2}{2}$.

Ricordiamo:

una *definizione* è un insieme di parole che descrive il significato di una parola nuova, spesso descrivendo le proprietà di un concetto che a quella parola è associato;

un *postulato* è una affermazione (solitamente una qualità o una proprietà) che si assume vera; un postulato che viene utilizzato per descrivere le proprietà di una certa classe di oggetti (ad esempio gli insiemi o i numeri naturali) spesso prende il nome di *assioma*.

Un *teorema* è l'affermazione di un fatto, desumibile tramite passaggi logici da una serie di affermazioni precedentemente acquisite che si suppongono vere. Tali affermazioni da cui si parte si dicono *ipotesi*, l'ultima affermazione conclusiva si dice *tesi*. Il susseguirsi di tali passaggi logici concatenati si dice *dimostrazione*. La tesi ovviamente è insita nelle ipotesi, solo che non è evidente, ed ha bisogno di passi per essere scoperta.

Nel teorema di Pitagora si parte dall'ipotesi che si sta considerando un triangolo rettangolo, e si arriva alla tesi, non evidente, che la somma delle aree dei quadrati costruiti sui cateti è uguale all'area del quadrato costruito sull'ipotenusa.

Ovviamente né una definizione né un postulato si dimostrano.

A volte la dimostrazione si svolge in maniera diversa: si parte dal negare la tesi e si dimostra che si contraddice o l'ipotesi stessa, oppure altri asserti precedenti la cui verità era già acquisita (dimostrazione *per assurdo*). La validità di questo tipo di dimostrazione dipende dal fatto che la nostra logica è a due valori, cioè una proposizione non può essere vera e falsa contemporaneamente (*principio di non contraddizione*). Pertanto se si arriva a contraddire una delle ipotesi, ciò è assurdo, e quindi vuole dire che quando si è supposto che non fosse vera la tesi, questa supposizione era sbagliata, e quindi la tesi è vera.

Un enunciato che asserisce una certa tesi deve essere verificato in *ogni* caso; non basta quindi verificare che esso è valido in un caso particolare (*esempio*: che tutti i numeri pari siano divisibili per 4 è falso, però esistono dei numeri pari, ad esempio 8, che sono divisibili per 4). Se esiste un caso (anche uno solo!) in cui l'enunciato non è verificato, l'enunciato è falso. Tale caso si dice *controesempio*. Nell'esempio precedente, un controesempio poteva essere il 2 stesso, o il 6, o il 34, che sono pari ma non divisibili per 4. Pertanto per dimostrare che un enunciato è falso basta un controesempio, mentre per dimostrare che un enunciato è vero *non basta* un esempio.

Principio di induzione: si applica alla dimostrazione di certe proprietà che dipendono da un numero naturale n, ed asserisce questo:

se una proprietà è vera per il più piccolo valore di n per cui essa è definita (ad es. $n = 1$)

se, supposta vera per n, si dimostra che è vera anche per $n + 1$

allora la proprietà è vera per ogni valore di n.

Attenzione: il principio di induzione non è un teorema, ma è una proprietà che discende da come sono stati definiti i numeri naturali (i numeri naturali sono raggiungibili *tutti* aggiungendo 1 al precedente).

Questa proprietà dei numeri naturali dice che essi sono messi in una fila che ha un primo elemento, che questa fila è unica e che tutti i naturali possono essere raggiunti con una operazione di passaggio al successivo.

Esercizio. Dimostriamo che $10^n \geq 10 \cdot n \ \forall n \in \mathbb{N}$. È vero per $n = 1$; lo supponiamo vero per n e lo dimostriamo per $n + 1$.
Devo quindi dimostrare che è $10^{n+1} \geq 10(n + 1)$.
Infatti è

$$10^{(n+1)} = 10^n \cdot 10 > 10^n \cdot 2 = 10^n + 10^n \geq (\text{per ipotesi di induzione}) \geq$$
$$10n + 10n \geq 10n + 10 = 10(n + 1)$$

Concludiamo che l'asserto è vero *per ogni* n (qui entra il principio di induzione).$\square$

Esempio del big domino rally e dei soldatini. $\square$

Capitolo II pp. 23-36.

Concetto di funzione: $f : A \longrightarrow B$ è una legge che associa ad ogni elemento di un insieme A un elemento (ed uno solo) di un insieme B. A si dice *insieme di definizione* o *dominio*, mentre B si dice *codominio*.

Esempi, anche non numerici.

Immagine non necessariamente coincidente con il codominio, ma certamente è un suo sottoinsieme. Tante volte per abuso di linguaggio si chiama codominio quello che invece è l'immagine.

Il dominio di $f(x) = x^2 + x^4$ è tutto $\mathbb{R}$, l'immagine è $\mathbb{R}_0^+$. È da notare che quando ci si avvicina allo 0 la funzione si comporta come x^2, mentre quando $|x|$ diventa grande la funzione si comporta come x^4.

Grafico: sottoinsieme dello spazio prodotto, insieme delle copie $(x, f(x))$. Ricordiamo che i valori $f(x)$ stanno sull'asse delle ordinate.

Grafico per punti (solo presi dalla disperazione). Il grafico di una funzione non è mai tagliato in più di un punto dalle parallele all'asse delle ordinate.

Retta, coefficiente angolare e suo segno: $y = mx + q$ una retta per un punto:

$$y - y_0 = m(x - x_0)$$

Trovare chi è q.

Retta per due punti distinti (x_0, y_0) e (x_1, y_1):

$$\frac{y - y_0}{y_1 - y_0} = \frac{x - x_0}{x_1 - x_0}$$

Scoprire che è

$$m = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}$$

Funzioni combinate (composte); modulo, funzione segno (non definita in 0).

Funzioni pari, funzioni dispari, simmetrie del grafico. Parità delle potenze pari, disparità delle potenze dispari.
Pari per pari fa pari, dispari per pari fa dispari, dispari per dispari fa pari.

Verificare che

$$f(x) = |x|\left(x + \frac{1}{x^3}\right)$$

è dispari.

Grafico delle potenze, del seno, del coseno, dalla tangente.

Grafico dell'esponenziale di tipo $f(x) = a^x$ a seconda se $a \lesseqgtr 1$.

Perché $y = \sqrt{x}$ non è né pari né dispari?
Perché $y = x^3 + 1$ non è né pari né dispari?