M172sett.tex

Seconda settimana
Inizio 8.10.2007

Capitolo II pp. 33-63

Ripresa del concetto di funzione. Esempi di funzioni, anche non numerici: posto a sedere nei cinema, ognuno sua madre (mentre i figli non costituiscono una funzione univoca della propria madre).

Immagine non necessariamente coincidente con il codominio, ma certamente eùn suo sottoinsieme.

Il dominio di $f(x) = x^2 + x^4$ è tutto $\mathbb{R}$, l'immagine è $\mathbb{R}_0^+$. È da notare che quando ci si avvicina allo 0 la funzione si comporta come x^2, mentre quando $|x|$ diventa grande la funzione si comporta come x^4.

Grafico: ricordiamo che è un sottoinsieme dello spazio prodotto, insieme delle copie $(x, f(x))$, e ricordiamo che se la seconda coordinata è divers, deve essere diversa anche la prima.

Osservazione sulla diversità di scrittura

$$f(x) = x^2 + 2x \qquad y = x^2 + 2x$$

La prima indica la funzione, la seconda indica il grafico come insieme di punti dello spazio prodotto.

Grafico per punti (solo se presi dalla disperazione). Invece una tabella può essere descritta con un grafico a scala. Il grafico di una funzione non è mai tagliato in più di un punto dalle parallele all'asse delle ordinate.La circonferenza definita con l'equazione

$$x^2 + y^2 = 1$$

non definisce una funzione univoca $y = f(x)$, bensì due funzioni diverse (la semicirconferenza superiore e la semicirconfernza inferiore)

Rette, coefficiente angolare e suo segno: $y = mx + q$ una retta per un punto:

$$y - y_0 = m(x - x_0)$$

Trovare chi è q.

Ricordiamo l'equazione di una retta per due punti distinti (x_0, y_0) e (x_1, y_1):

$$\frac{y - y_0}{y_1 - y_0} = \frac{x - x_0}{x_1 - x_0}$$

Scoprire che è

$$m = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}$$

Modulo, funzione segno (non definita in 0).
Si noti che $|a| < |b|$ è equivalente ad $a^2 < b^2$ (cioè se e vera la prima è vera la seconda e viceversa), ma non implica $a < b$, prendiamo $a = 1$, $b = -2$.

Funzioni combinate (composte):

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}; \quad g.\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$x \in \mathbb{R},\ f(x) \in \mathbb{R},\ g(f(x)) \in \mathbb{R}$$

Differenza tra $\sin x^2$ e $\sin^2 x$.

É sempre vera $\lg x^2 = 2 \lg x$?
NO: solo se $x > 0$. É invece sempre vera: $\lg x^2 = 2 \lg |x|$.
Verifica di quali sono le immagini delle rispettive funzioni componenti.

Proprietà dei logaritmi: $\lg x^a = a \cdot \lg |x|$.
Il modulo lo si può omettere soltanto se $x > 0$. Ricordiamo che x^a è sempre definito se $a \in \mathbb{Z}$, per $a \in \mathbb{R}$ è definito solo per $x \geq 0$.

Funzioni pari, funzioni dispari, simmetrie del grafico. Parità delle potenze pari, disparità delle potenze dispari.
Pari per pari fa pari, dispari per pari fa dispari, dispari per dispari fa pari.
Verificare che

$$f(x) = |x|\Big(x + \frac{1}{x^3}\Big)$$

è dispari.

Grafico dell'esponenziale di tipo $f(x) = a^x$ a seconda se $a \lesseqgtr 1$. Nota sull'esponenziale e sulla sua rapidità di crescita, e anche sulla sua rapidità di diminuzione per x che diventa grande. Proprietà essenziale: la positività (pp. 35-36).

Grafico del logaritmo $\lg_a x$ a seconda se $a \lesseqgtr< 1$. Non ha senso un logaritmo in base 1 (il suo grafico sarebbe la retta $y = 1$

Funzioni monotone: crescenti, decrescenti, in senso stretto, in senso lato.
Iperbole $y = \frac{k}{x}$; il grafico occupa il I e III quadrante, oppure il II e IV, a seconda se il k è positivo o negativo. Diversità del grafico (più o meno stretto) a seconda dei valori di k.

Funzione iniettiva: $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$.
Esempi con funzioni definite anche su insiemi che non sono intervalli, o con funzioni non continue su un intervallo. Esempio: iperbole, radice quadrata, monomi dispari, monomi pari soltanto se guardati su una semiretta (positiva o negativa).

Funzione inversa di una funzione f (*da non confondersi con la funzione che scambia il numeratore col denominatore*): esiste solo se la f è iniettiva, e viene indicata con f^{-1}:

$$f : A \longrightarrow B \qquad f^{-1} : B \longrightarrow A$$

L'insieme di definizione è scambiato con l'immagine, e il grafico è simmetrico rispetto alla bisettrice del I e III quadrante.

TEOREMA - *Ogni funzione strettamente monotona è invertibile.*

Non è vero il viceversa (vd. iperbole)

Il logaritmo visto come l'inversa dell'esponenziale, in base maggiore o minore di 1.
La crescenza e decrescenza della f si mantengono nella f^{-1}.
La parabola è invertibile soltanto nei suoi tratti di monotonia. L'inversa del tratto sull'asse delle x con $x > 0$ è $g(x) = \sqrt{x}$, l'inversa del tratto con $x < 0$ è $g(x) = -\sqrt{x}$.

L'inversa dell'inversa è la funzione di partenza. (p. 41)

Ricordiamo le identità $y = e^{\lg y}$, $y = a^{\lg_a y}$, $\lg_a x = \frac{\lg_e x}{\lg_e a}$.
Non ha senso scrivere un logaritmo in base 1, perché nessuna potenza di 1 dà un numero diverso da 1.

Funzioni trigonometriche.

Funzioni riconducibili alle funzioni elementari. Traslazioni secondo l'asse delle x, secondo quello delle y. Moduli in genere, moduli di polinomi di secondo grado. Funzioni trigonometriche con periodo diverso ($\sin 3x$, $cos \frac{x}{4}$).

Funzioni inverse delle funzioni trigonometriche e intervalli in cui si considera l'inversa. Attenzione all'insieme di definizione di tali funzioni.

Confronto di grafici, disequazioni con il modulo: $|x| \leq 4$, $|x| \geq 4$.

Massimi e minimi di una funzione; punti di massimo e di minimo. *Non tutti gli insiemi* hanno massimo: esempi e controesempi.

Insiemi limitati ed illimitati; funzioni limitate e illimitate. Alcuni esempi.

Funzioni periodiche (p. 53)
Periodi delle funzioni trigonometriche.

Successione: una funzione il cui dominio è $\mathbb{N}$.
$1/n, \ a^n$.

Limiti (pp. 64-84) Esempi intuitivi:
raffreddamento: avvicinamento alla temperatura ambiente senza raggiungerla.
tangente di un arco quando l'arco si avvicina a $\pi/2$.
Limiti per $x \to \infty$ Funzioni illimitate senza avere limite: $x \sin x$.

Punto di accumulazione di un insieme (p. 64). In ogni intervallo che lo contiene esistono punti dell'insieme diversi da lui.
Esempio: 1/n.

Punto isolato (p. 65)

Definizione di *limite finito* l per $x \to x_0$ (p. 67).

Notiamo che ϵ è arbitrario, ma δ dipende da ϵ.

Esempio con $y = x$ e con $y = x^2$.

Funzioni costanti.

Una funzione che ha limite 0 si dice *infinitesimo*.
Un infinitesimo per una limitata è ancora un infinitesimo. Limiti destro e sinistro e funzioni prive di limite ($\sin 1/x$).

Limiti infiniti per $x \to x_0$ e per $x \to \pm\infty$.

Teoremi sui limiti (pp. 76-84):
unicità , permanenza del segno, teorema del confronto.