M163sett.tex

3a settimana

Inizio: 15.10.2007

Richiamo sulla definizione di *limite finito* l per $x \to x_0$ (p. 67).

Notiamo che ϵ è arbitrario, ma δ dipende da ϵ.
Riprendere la definizione di funzione continua.

Esempio con $y = x$ nel punto $x = 2$ (vd. p. 72) e con $y = x^2$ nel punto $x = 2$.

Fissato ϵ deve essere

$$2 - \delta < x < 2 + \delta \Longrightarrow 2 - \epsilon < f(x) < 2 + \epsilon$$

Infatti è $4 - \epsilon < f(x) < 4 + \epsilon$ (vd. p. 72) $\delta = \epsilon$ (ovvio: dalla figura).
Vediamo per x^2: deve essere

$$2 - \delta < x < 2 + \delta \Longrightarrow 4 - \epsilon < f(x) < 4 + \epsilon,$$

cioè

$$4 - \epsilon < x^2 < 4 + \epsilon$$

Funzioni costanti: sono ovviamente provviste di limite per x tendente a qualsiasi punto e sono continue in qualsiasi punto (p. 72).

Limiti destro e sinistro: $f(x) = \operatorname{sgn} x$.

Funzioni prive di limite ($f(x) = \sin(1/x)$)

Una funzione che ha limite 0 si dice *infinitesimo*.
$\sin x, \quad x^n, \quad \cos x - 1$ sono tutti inifinitesimi per $x \to 0$.

Un infinitesimo per una limitata è ancora un infinitesimo.(prop. 25, p. 72)

Esempi:
$x\operatorname{sgn} x$
$f(x) = x \ \sin\frac{1}{x}$ per $x \to 0$. La x tende ad un punto che non è dell'i.d.d, però è di accumulazione; è il prodotto di una funzione che ha limite 0 per una che non ha limite, però è limitata.

Limiti infiniti per $x \to x_0$ (Distinguere il limite $+\infty$ dal limite $-\infty$). La funzione è $> M$ oppure $< -M$ per gli x che appartengono all'intervallo $]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$. (3.4)

$1/x, \quad 1/x^2, \quad 1/\sqrt{x}$ per $x \to 0$.

Limiti (finiti o no) per $x \to \pm\infty$.
Distinguere il $+\infty$ dal $-\infty$.

Esempi: $1/x$, $1/x^2$, polinomi, esponenziali, logaritmi.

Funzioni inverse delle funzioni trigonometriche: insiemi di definizione, immagini, loro limiti per x che tende agli estremi degli intervalli di definizione.

Teoremi sui limiti (pp. 76-84):
Riprendere l'unicità, estendendola anche ai limiti infiniti e per $x \to \pm\infty$.. .

Operazioni sui limiti:

Limite della somma = somma dei limiti (purché entrambi finiti). Il limite vale $\pm\infty$ se uno (solo) dei limiti è rispettivamente $\pm\infty$,.
$x + 1 \to +\infty$ per $x \to +\infty$. Del pari $x - 1$.
Resta escluso il caso $+\infty - \infty$.

Limite del prodotto = prodotto dei limiti (purché siano entrambi finiti). Se entrambi sono infiniti, il prodotto ha limite infinito con il segno che viene dalla regola dei segni.
Se uno è infinito e l'altro è finito *diverso da 0* il limite è infinito con il segno proveniente dalla regola dei segni.
Resta escluso il caso $\infty \cdot 0$.

limite di un quoziente = quoziente dei limiti, purché non siano entrambi 0 o entrambi ∞.
Se è nullo il limite del denominatore e quello del numeratore no, il limite è infinito, con la regola dei segni.
Se il limite del denominatore è ∞ e quello del numeratore no, il limite è 0.
Il limite del reciproco è uguale al reciproco del limite; se il limite del denominatore è 0, bisogna guardare il segno a destra e a sinistra.
Es.: $\frac{1}{x}$, $\frac{1}{x^2}$, $\frac{1}{\arctan x}$.
Restano esclusi $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$.

Attenzione: restano escluse tutte le situazioni in cui una delle due funzioni non ha limite.
Però qualche caso si può risolvere lo stesso:
$\lim_{x\to\infty} \frac{\sin x}{x} = 0$ (infinitesimo per limitata)

Altri teoremi sui limiti

Teorema della permanenza del segno (con dim.; p. 83)
Attenzione: se il limite è 0, nulla si può dire (vd. $x \sin \frac{1}{x}$)

Teorema del confronto o dei carabinieri (con dim.: p. 83)
Ne abbiamo visto un esempio con $x \sin \frac{1}{x}$ per $x \to 0$ prendendo come f e g rispettivamente $|x|$ e $-|x|$;
altro esempio $x^2 \sin \frac{1}{x}$, dove la funzione è stretta tra le due parabole;
altro esempio: $x + \sin x$ per $x \to +\infty$, che risulta sempre compresa tra $x - 1$

e $x+1$.(è da notare che non posso qui utilizzare il teorema sulla somma dei limiti, perché il seno *non* ha limite per $x \to \infty$.

Attenzione:

$$\lim_{x\to 0^+} \big(x \sin\frac{1}{x}\big) \cdot \frac{1}{x} = \lim_{x\to 0^+} \sin\frac{1}{x}$$

che non esiste. Abbiamo trovato un caso di $0 \cdot \infty$ che non ha limite.

Vediamo $x - \sqrt{x}$ per $x \to +\infty$ è del tipo $+\infty - \infty$, però mettendo in evidenza $\sqrt{x}$ si ha un prodotto di infiniti e quindi va a $+\infty$.

Limiti di funzioni razionali per $x \to \infty$: la potenza di grado maggiore trascina tutto al proprio limite.

Se gli esponenti di numeratore e denominatore sono uguali, si divide per il monomio di grado massimo, e risulta il limite del rapporto tra i coefficienti.

Limite di funzioni monotone: esiste sempre il limite destro e il limite sinistro (possono non essere uguali). Per $x \to \infty$ il limite esiste sempre, finito o infinito..

Limite per successioni (qui non si richiede che la f sia definita su una semiretta); il dominio di definizione delle successioni è $\mathbb{N}$ e quindi ha senso soltanto il limite per $n \to +\infty$.

Ripetiamo la definizione, questa volta usando ν (definizione 36, pp. 93-94).

Successione convergente: esempi

$$\{\frac{1}{n}\} \to 0, \quad \{\frac{n-1}{n}\} \to 1, \quad \{\frac{n+1}{n}\} \to 1, \quad \{\arctan n\} \to \frac{\pi}{2}, \quad \{\sin\frac{1}{n}\} \to 0$$

(attenzione: non confondere quest'ultima con $\sin\frac{1}{x}$ per $x \to 0$!!!)

Successione divergente; esempi $\{n\} \to +\infty$, $\{e^n\}$.

Successione indeterminata; esempio: $\{(-1)^n\}$.

Successioni monotone: mai indeterminate (teor. 37, p. 95).

Concetto di *intorno* di un punto al finito: intervallo aperto contenente il punto; *intorno* di $+\infty$ o di $-\infty$ è una semiretta, rispettivamente crescente o decrescente.

Tutte le definizioni di limite si possono ripetere utilizzando questo nuovo concetto: fissato un intorno V di ℓ, si può trovare un intorno U di x_0 o di $\pm\infty$ tale che $x \in U \Rightarrow f(x) \in V$ (p. 95).

Ripresa delle definizione di **funzione continua** in un punto x_0.

Definizione di **funzione discontinua** in un punto.

Definizione di *salto*: $f(x_{0^+}) - f(x_{0^-})$. Esempio: *sgn* x.

Definizione di *prolungamento per continuità*.

Continuità delle funzioni elementari (Proposizione 40; la dim. non fa parte del programma d'esame) Continuità della somma di funzioni continue, del prodotto, del reciproco (purché il denominatore sia diverso da 0), e del quoziente (purché il denominatore sia diverso da 0) (tutto senza dimostrazione)

Teorema di Weierstrass sugli intervalli chiusi e limitati (con esempi e controesempi: $\frac{1}{x}$ aggiungendoci oppure no un valore in 0).

Teorema degli zeri: se una funzione continua in un intervallo assume valori positivi e negativi esiste almeno un punto in cui si annulla
(senza dimostrazione).

Corollario:
Teorema di tutti i valori: Una funzione continua in un intervallo, se assume due valori diversi y_1 e y_2 allora assume tutti i valori compresi tra di essi. In altre parole: l'immagine di un intervallo è un intervallo (senza dimostrazione). $\blacksquare$

La funzione inversa di una funzione continua è continua, la funzione inversa di una funzione crescente è crescente, di una decrescente è decrescente.

Notare che dire che una funzione è continua in x_0 equivale a dire che $f(x_0 + h - f(x_0)$ è un infinitesimo per $h \to 0$, oppure che $f(x) - f(x_0)$ è un infinitesimo per $x \to x_0$.

Funzione composta con esempi (p. 104)
Limite di una funzione composta da funzioni continue.

Esempi

$$\lim_{x \to 0} e^{\sin x} = 1; \quad \lim_{x \to \frac{\pi}{2}^-} \frac{3\tan^2 x - 5}{2\tan^2 x + 6} = \lim_{z \to +\infty} \frac{3z^2 - 5}{2z^2 + 6} = \frac{3}{2}$$

Una funzione composta di funzioni continue è continua, e quindi per le funzioni continue il limite della composta $f(g(x))$ è il limite di quella esterna f che opera sul limite di quella interna g.

Richiamo dei **due limiti fondamentali** (senza dim.):

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1; \quad \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$$

Terzo limite fondamentale: $\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$.

Spiegazione di "in un intorno di x_0 una $f(x)$ *si comporta come* un'altra funzione $g(x)$":
se indichiamo con $o(x)$ un infinitesimo con x si ha, in un intorno di $x = 0$:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \Rightarrow \sin x = x + o(x); \qquad \lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1 \Rightarrow e^x - 1 = x + o(x);$$

$$\arctan x = x + o(x); \qquad \tan x = x + o(x)$$

Enunciamo anche il fatto (che non dimostriamo) che è anche

$$\lim_{x\to +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e = 2,71828182845...$$

Qualche limite di forma indeterminata riconducibile a casi noti:

$$\lim_{x\to -\infty} \frac{x}{\sqrt{5x^2 - x + 10}} = \lim_{x\to -\infty} \frac{x}{|x|\sqrt{5 - \frac{1}{x} + \frac{10}{x^2}}} = -\frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$\lim_{x\to 0^+} (\log \sin 10x - \log 7x) = \lim_{x\to 0^+} \log \frac{\sin 10x}{7x} = \lim_{x\to 0^+} \log \frac{\sin 10x}{\frac{7}{10}10x} =$$

$$(\text{ posto } 10x = z) = \lim_{z\to 0^+} \log \frac{10}{7}\frac{\sin z}{z} = \log \frac{10}{7}.$$

Problemi che conducono al concetto di **derivata**: tangente ad una curva e velocità di un corpo.