M174sett.tex

4a settimana

Inizio 22/10/2007

Terzo limite fondamentale (sul libro, p. 113, è chiamato “secondo”) $\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1$.
La tangente al grafico nel punto $(0,0)$ risulta $y=x$ (vedremo poi perché).

Ricordare che e è il nome che diamo al limite della successione $(1=\frac{1}{n})^n$, dopo aver dimostrato (cosa che noi abbiamo dato per buona) che è crescente ed è limitata, e quindi ha limite finito; una volta così definito il numero $e=2,7182818284\ldots$ si può dimostrare che esiste finito anche $\lim_{x\to+\infty}(1+\frac{1}{x})^x$ e che è proprio e.

Calcoliamo

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\text{(moltiplicando sopra e sotto per } 1+\cos x)=$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{x^2}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1}{1+\cos x}=\frac{1}{2}$$

Ricordiamo che abbiamo già calcolato:

$$\lim_{x\to\infty}x\sin\frac{1}{x}=\lim_{z\to 0}\frac{\sin z}{z}=1$$

Proprietà delle funzioni continue:
La funzione inversa di una funzione continua è continua, la funzione inversa di una funzione strettamente crescente è strettamente crescente, di una strettamente decrescente è strettamente decrescente.

Attenzione: se le funzioni dette non fossero *strettamente* crescenti o decrescenti non sarebbe garantita l'esistenza dell'inversa. Una funzione costante non ha inversa, eppure è crescente (e anche decrescente), ma non strettamente.

Notare che dire che una funzione è continua in x_0 equivale a dire che $f(x_0+h)-f(x_0)$ è un infinitesimo per $h\to 0$, oppure che $f(x)-f(x_0)$ è un infinitesimo per $x\to x_0$. Notiamo che quando si scrive $f(x_0+h)$ si sta parlando di una funzione di h che è definita in un intorno di 0, mentre quando parliamo di $f(x)-f(x_0)$ stiamo parlando di una funzione di x definita in un intorno di x_0. Abbiamo semplicemente posto $h=x-x_0$, è come se avessimo traslato l'asse delle y nel punto x_0.

Spiegazione di “in un intorno di x_0 una $f(x)$ *si comporta come* un'altra funzione $g(x)$”:
Due infinitesimi si dicono *simultanei* se vanno a 0 per x che tende allo stesso punto x_0. x, $\tan x$, $\sin x$, x^2, $\sqrt{x}$, $e^x-1, 1-\cos x$ sono tutti infinitesimi

simultanei per $x \to 0$; $\lg_{1/2} x,\ \lg x,\ x-1$ sono tutti infinitesimi simultanei per $x \to 1$; $1/x,\ 1/x^2,\ 1/\lg x,\ e^{-x}$ sono tutti infinitesimi simultanei per $x \to +\infty$.

(Attenzione: gli infinitesimi sono trattati nel libro nel § 8.1., alle pagg. 218-223).

Dati due infinitesimi simultanei per $x \to x_0$ o per $x \to \pm\infty$, $f(x)$ e $g(x)$, si dice che $f(x)$ è *di ordine superiore* a $g(x)$ se è:

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$$

(stessa cosa per $x \to \pm\infty$).
Se invece il limite del rapporto è $\ell \neq 0$ i due infinitesimi si dicono *dello stesso ordine*;
se tale limite è infinito si dice che $g(x)$ è *di ordine inferiore*;
se tale limite non esiste i due infinitesimi si dicono *non confrontabili* (ad esempio x e $x \sin \frac{1}{x}$).

Se indichiamo con $o(x)$ un infinitesimo simultaneo con x per $x \to 0$ ma di ordine superiore a x si ha, in un intorno di $x = 0$:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \Leftrightarrow \sin x = x + o(x); \qquad \lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1 \Leftrightarrow e^x - 1 = x + o(x);$$

$$\arctan x = x + o(x); \qquad \tan x = x + o(x)$$

Quando due infinitesimi$f(x)$ e $g(x)$ simultanei sono dello stesso ordine, il prodotto $\ell \cdot g(x)$ si dice *parte principale* di $f(x)$ rispetto a $g(x)$. In quelli tra gli esempi sopracitati che sono infinitesimi dello stesso ordine di x per $x \to 0$, le parti principali rispetto a x degli infinitesimi al primo membro sono tutte uguali a x; invece per x^2 e per $1 - \cos x$ che sono dello stesso ordine di x^2, le parti principali sono rispettivamente x^2 stesso e $\frac{1}{2}x^2$.

Dire che un infinitesimo f "si comporta come" un infinitesimo simultaneo g per $x \to x_0$ significa dire che sono dello stesso ordine e hanno la stessa parte principale.

Funzione composta con esempi (p. 104).
Limite di una funzione composta da funzioni continue.

Esempi:

$$\lim_{x\to 0} e^{\sin x} = 1; \qquad \lim_{x\to \frac{\pi}{2}^-} \frac{3\tan^2 x - 5}{2\tan^2 x + 6} = \lim_{z\to +\infty} \frac{3z^2 - 5}{2z^2 + 6} = \frac{3}{2}$$

Una funzione composta di funzioni continue è continua, e quindi per le funzioni continue il limite della composta $f(g(x))$ è il limite di quella esterna f che opera sul limite di quella interna g.

Sono essenziali i limiti riconducibili a casi noti delle pagg. 113-114

Problemi che conducono al concetto di derivata: tangente ad una curva e velocità di un corpo. (Capitolo 5)

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

Il rapporto tra la differenza delle ordinate e la differenza delle ascisse del punto mobile si dice *rapporto incrementale*.

Scritture del tipo $\frac{df}{dx}$, $\dot{y}$, $\lim_{\Delta x\to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x}$.

Derivata di una costante:

$$\lim_{h\to 0} \frac{c-c}{h} = 0;$$

derivata di $y = x$ nel punto x_0:

$$\lim_{h\to 0} \frac{(x_0+h)-x_0}{h} = 1$$

Derivata di $f(x) = x^2$ (p. 119)

Derivabilità e continuità (p. 120): la seconda qualità implica che l'incremento della funzione è un infinitesimo per $x \to x_0$, la prima implica che è un infinitesimo tale che il limite del rapporto con $x - x_0$ è finito.
Se tale limite è $\ell \neq 0$, vuole dire che l'incremento è dello stesso ordine di $x - x_0$, cioè si comporta come $\ell(x - x_0)$. Se tale limite è 0, cioè la derivata è nulla in quel punto, l'incremento è un infinitesimo di ordine superiore a $x - x_0$.

Relazione tra la derivata di f in un punto x_0 e la retta tangente al grafico della funzione nel punto $(x_0, f(x_0))$.

Attenzione: il testo usa indifferentemente h e Δx: sono la stessa cosa. Inoltre scrive i calcoli effettuandoli nel punto generico che chiama x, in vece che x_0.

Regole di derivazione; derivata dei polinomi, di $\frac{1}{x}$, di e^x, delle funzioni trigonometriche, della funzione potenza anche con esponente reale (pp. 124-130 senza dimostrazioni, salvo che per il n. 3 di p. 124, pp. 136-137).

Alcuni esempi di funzioni non derivabili, ancorché continue: punti angolosi, $|x|$, $\sqrt{|x|}, x \sin \frac{1}{x}$.
Se si calcola il limite del rapporto incrementale, si vede che non c'è.

È invece derivabile nello 0 $x^2 \sin \frac{1}{x}$. Infatti quest'ultima ha limite del rapporto incrementale per $x \to 0$, che viene 0, quindi la funzione è derivabile in 0 con derivata nulla, ma la derivata non è continua in $x = 0$. Verifichiamo

che non è continua:
infatti la derivata è:

$$2x \sin \frac{1}{x} + x^2 \cos \frac{1}{x} \cdot (-\frac{1}{x^2})$$

la quale *non ha limite* per $x \to 0$. Grafici con punti in cui la tangente è verticale (pp. 122-123; attenzione: nella fig. a destra di p. 122 la radice cubica è considerata anche per gli $x < 0$, cosa che noi escludiamo).

Concetto di derivata destra e sinistra:

Regola di derivazione delle funzioni composte. Formule (5.21) e (5.23) di p. 131 che rendono ragione della comodità della scrittura come quoziente:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{\Delta z} \cdot \frac{\Delta z}{\Delta x}$$

(regola della catena)

Esempi di derivate con funzioni composte con i logaritmi, le esponenziali, i polinomi, le funzioni trigonometriche (pp. 132-134). Ricordare che la derivata della tangente si può anche scrivere $1 + \tan^2 x$.

Esempi di derivate di funzioni del tipo $f(x)^{g(x)}$ (§ 5.4.1):

$$x^x = e^{x \log x}$$

per cui

$$(x^x)' = e^{x \log x} \cdot (x \log x)' = e^{x \log x}(\log x + x\frac{1}{x}) = x^x(\log x + 1)$$

Si può notare che la funzione $\to +\infty$ per $x \to +\infty$, $\to 1$ per $x \to 0$ (confronto tra infinitesimi), e la sua derivata tende a $-\infty$, e si annulla per $x = 1/e$, e tende a $+\infty$ per $x \to +\infty$.

$f(x) = (\sin x)^x$ è definita solo negli intervalli in cui il seno è ≥ 0, a parte lo 0 stesso; lì la funzione si può scrivere: $e^{x \log(\sin x)}$ e quindi la derivata vale

$$e^{x \log(\sin x)} \cdot (\log(\sin x) + x(\log(\sin x))')$$

ed è

$$(\log(\sin x))' = \frac{1}{\sin x} \cdot \cos x = \frac{1}{\tan x}$$

Incollando i pezzi si ha:

$$f'(x) = (\sin x)^x(\log(\sin x) + \frac{x}{\tan x})$$

Questa derivata non esiste nei punti in cui il seno si annulla.

Imparare a memoria le derivate seguenti:

$$(\log x)' = \frac{1}{x}; \quad (\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}; \quad (\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}; \quad (\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}$$

Notare che $\arcsin x$, $\arccos x$ hanno la derivata che va all'infinito per $x \to \pm 1$. Invece la derivata dell'arcotangente $\to 0$ per $x \to \pm\infty$. Notare la tangente.

Calcolare la derivata di $f(x) = \arctan \sin x$, che è una funzione periodica di periodo 2π (e quindi lo è anche la sua derivata):

$$f'(x) = \frac{1}{1+\sin^2 x} \cdot \cos x$$

Essa si annulla per $x = \frac{\pi}{2} + K\pi$.

Calcolare la derivata di $f(x) = \arctan \sin^3 x$.
Risulta $f'(x) = \frac{1}{1+\sin^6 x} \cdot 3\sin^2 x \cdot \cos x$ che si annulla nei punti $K\pi$ e nei punti $\frac{\pi}{2} + K\pi$.

Calcolare la derivata di $f(x) = \arctan(\arccos x^2)$
Tale funzione è definita solo per $0 \leq x^2 \leq 1$, cioè per $-1 \leq x \leq 1$, ed è una funzione pari. La guardiamo solo per $x \geq 0$. L'arcocoseno di x^2 risulta (decrescente e) limitato tra 0 e $\pi/2$. Pertanto $\arctan(\arccos x^2)$ risulta (decrescente e) limitata tra 0 e $\arctan \frac{\pi}{2}$. Notiamo che $\arctan(\arccos 0) < \arccos 0$.
Risulta $f'(x) = \frac{1}{1+\arccos^2 x^2} \cdot (-\frac{1}{\sqrt{1-x^4}}) \cdot 2x$. Si annulla solo in $x = 0$.

Trovare le equazioni delle rette tangenti al grafico della funzione

$$f(x) = 3 - \frac{6}{2x-1}$$

nei punti nei quali questo incontra gli assi coordinati.
I punti in questione sono $(0, 9)$ e $(\frac{3}{2}, 0)$. Risulta

$$f'(x) = \frac{12}{(2x-1)^2}$$

che per il primo punto risulta $f'(0) = 12$ e per il secondo risulta $f'(\frac{3}{2}) = 3$.
Pertanto le rette sono $y - 9 = 12x \Rightarrow y = 12x + 9$ e $y = 3(x - \frac{3}{2}) \Rightarrow y = 3x - \frac{9}{2}$.

Derivate di ordine superiore. Accelerazione.

Alcune funzioni hanno derivate di tutti gli ordini (ad es. polinomi, che si annullano da una certa derivata in poi, le funzioni seno e coseno che si ripetono ciclicamente, la tangente, e^x, il logaritmo, ecc.)

La retta normale ad un grafico è perpendicolare alla retta tangente, e quindi ha come coefficiente angolare $-\frac{1}{m}$. Perciò se la tangente al grafico di $f(x)$ nel punto $(x_0, f(x_0))$ non è orizzontale, la normale non è verticale, e il suo coefficiente angolare è $-\frac{1}{f'(x_0)}$.

Def. di punto di massimo relativo (*interno*): $f(x_0) \geq f(x)$
Analogamente, di minimo.

Massimo proprio se la maggiorazione è stretta.

Nei punti di massimo o minimo relativi (interni) la derivata (se c'è!) è nulla.
Dim.: il rapporto incrementale è ≥ 0 da una parte, è ≤ 0 dall'altra; se $\exists$ il limite, non può essere altro che 0.

Teor. di Rolle (con dim.) (p. 164)

Teor. di Lagrange: $\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c)$.
(niente dim.: interpretazione geometrica) (p. 166).

Se su intervallo la derivata è sempre nulla, la funzione è costante (cor. 56, p. 167).

Se su un intervallo due funzioni hanno la stessa derivata, esse differiscono per una costante (cor. 57).

Se una funzione ha derivata positiva in un intervallo, allora è crescente in senso stretto nell'intervallo (si basa sul teor. di Lagrange) (attenzione: se non siamo su un intervallo la tesi può non essere vera.)

Teorema sul segno della derivata prima: se la derivata cambia segno e passa da positiva a negativa, c'è un massimo, altrimenti c'è un minimo.

Teor. di Cauchy (p. 170: attenti al trucco, non si può applicare il teor. di Lagrange semplicemente facendo il quoziente, perché c esprime punti diversi per la f e per la g !)

Funzioni iperboliche e loro derivate (non ci sono sul libro):

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \qquad \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

L'una è la derivata dell'altra. La tangente iperbolica è il quoziente $\sinh x / \cos hx$, ed haun andamento come l'arcotangente, solo che ha limiti -1 e +1 per $x \to \pm\infty$ rispettivamente.

Regola di L'Hôpital, accenno ai vari casi, senza nessuna dimostrazione. (p. 171)

$$lim_{x\to\infty} \frac{\log x}{x} = \text{ (H) } = lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} = 0.$$

Del pari se ho $\sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}$.

Del pari $\frac{e^x}{x^3}$ per $x \to +\infty$.
Invece per $x \to -\infty$ NON siamo nel caso $\frac{0}{0}$; bisogna confrontare con x^k e derivando k volte il limite viene 0.

$$\lim_{x \to 0} \frac{x - \sin x}{\tan x - x}$$

si deriva due volte, e viene $\frac{1}{2}$.

Le forme $0 \cdot \infty$ si possono portare alla forma $\frac{0}{0}$:

$$\lim_{x \to 0^+} x \cdot lgx = \lim_{x \to 0^+} \frac{\lg x}{\frac{1}{x}}$$

e con la regola di L'Hôpital si vede che il limite è 0.

Stessa cosa se moltiplico per x^α con qualsiasi esponente $\alpha > 0$.

$$\lim_{x \to +\infty} x^\alpha - \log x$$

che è del tipo $\infty - \infty$ (vd. pag. 174). Mettiamo in evidenza x^α e occupiamoci soltanto della frazione $\frac{\log x}{x^\alpha}$ che abbiamo visto tendere a 0. Pertanto il tutto va a $+\infty$.

Se abbiamo un polinomio $P(x)$ e uno $Q(x)$ e si deve calcolare $\lim_{x \to +\infty} P(x) - \log Q(x)$, si mette in evidenza $P(x)$ e poi il limite viene infinito (vd. esempi pp. 174-175).

Del pari con funzioni del tipo $P(x) - e^x$ per $x \to +\infty$, viene $-\infty$.

Consideriamo adesso funzioni del tipo

$$f(x)^{g(x)} = e^{g(x) \log f(x)}$$

Ci troviamo davanti a situazioni del tipo $0^0,\ 1^\infty,\ \infty^0$

Ad esempio $lim_{x \to +\infty} x^{\frac{1}{x}}$.
L'esponente di e diventa $\frac{\log x}{x}$ che $\to 0$, e quindi il limite risulta 1.

Studiamo la funzione

$$f(x) = x\sqrt{x+1}$$

È definita per $x \geq -1$, tende a 0 per $x \to -1^+$, va all'infinito per $x \to +\infty$. La derivata si annulla in $x = -\frac{2}{3}$ ed abbiamo un minimo, guardando il segno della derivata.

A volte la regola di L'Hôpital non si può applicare subito, perchè non dà risultato immediato.
Esempio (p. 176):

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}$$

Derivando si peggiorano le cose, e quindi non è opportuno. Ponendo invece $\frac{1}{x} = t$ si ha

$$\lim_{t \to -\infty} t^2 e^t = \lim_{t \to -\infty} \frac{t^2}{e^{-t}} = H = 0.$$

Studio della funzione

$$\frac{1 - e^x}{e^{2x} + 1}$$

Per $x \to +\infty$ si applica l'Hôpital, invece per $x \to -\infty$ la funzione tende a 1. La derivata si annulla in due punti, uno positivo e uno negativo (regola di Cartesio: una permanenza e una variazione). La funzione è positiva sul semiasse negativo, e negativa sul semiasse positivo, il grafico passa per l'origine, dove la derivata è negativa. Il punto di minimo è sul semiasse delle x positive, il punto di massimo è tra i reali negativi.

Studio della funzione

$$f(x) = \arctan \frac{1}{1 - x^2}$$

Non è definita per $|x| = 1$, è pari, la studio solo per $x \geq 0$, per i reali negativi ha grafico simmetrico rispetto all'asse delle y. Ha limite per $x \to 1^+$ ed è $-\frac{\pi}{2}$; ha limite per $x \to 1^-$ ed è $+\frac{\pi}{2}$. Per $x \to \infty$ tende a 0 (mantenendo valori negativi).

Sono importanti tutti gli esempi da p. 168 a p. 183.

****

Non fanno parte del programma d'esame: le pagg. 146-161, la dim. di pag. 171; §7.2 .