M175sett.tex

5a settimana

Inizio 29/10/2007

$f(x) = (\sin x)^x$ è definita solo negli intervalli in cui il seno è ≥ 0, a parte lo 0 stesso; lì la funzione si può scrivere: $e^{x \log(\sin x)}$ e quindi la derivata vale

$$e^{x \log(\sin x)} \cdot (\log(\sin x) + x(\log(\sin x))')$$

ed è

$$(\log(\sin x))' = \frac{1}{\sin x} \cdot \cos x = \frac{1}{\tan x}$$

Incollando i pezzi si ha:

$$f'(x) = (\sin x)^x (\log(\sin x) + \frac{x}{\tan x})$$

Questa derivata non esiste nei punti in cui il seno si annulla.

Imparare a memoria le derivate seguenti:

$$(\log x)' = \frac{1}{x}; \quad (\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}; \quad (\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}; \quad (\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}$$

Notare che $\arcsin x$, $\arccos x$ hanno la derivata che va all'infinito per $x \to \pm 1$. Invece la derivata dell'arcotangente $\to 0$ per $x \to \pm\infty$. Notare la tangente.

Calcolare la derivata di $f(x) = \arctan \sin x$, che è una funzione periodica di periodo 2π (e quindi lo è anche la sua derivata):

$$f'(x) = \frac{1}{1+\sin^2 x} \cdot \cos x$$

Essa si annulla per $x = \frac{\pi}{2} + K\pi$.
Notiamo che l'immagine della funzione è limitata tra $-\frac{\pi}{4}$ e $\frac{\pi}{4}$.

Calcolare la derivata di $f(x) = \arctan \sin^3 x$.
Risulta $f'(x) = \frac{1}{1+\sin^6 x} \cdot 3\sin^2 x \cdot \cos x$ che si annulla nei punti $K\pi$ e nei punti $\frac{\pi}{2} + K\pi$.

Calcolare la derivata di $f(x) = \arctan(\arccos x^2)$
Tale funzione è definita solo per $0 \leq x^2 \leq 1$, cioè per $-1 \leq x \leq 1$, ed è una funzione pari. La guardiamo solo per $x \geq 0$. L'arcocoseno di x^2 risulta (decrescente e) limitato tra 0 e $\pi/2$. Pertanto $\arctan(\arccos x^2)$ risulta (decrescente e) limitata tra 0 e $\arctan \frac{\pi}{2}$. Notiamo che $\arctan(\arccos 0) < \arccos 0$.
Risulta $f'(x) = \frac{1}{1+\arccos^2 x^2} \cdot (-\frac{1}{\sqrt{1-x^4}}) \cdot 2x$. Si annulla solo in $x = 0$.

Trovare le equazioni delle rette tangenti al grafico della funzione

$$f(x) = 3 - \frac{6}{2x-1}$$

nei punti nei quali questo incontra gli assi coordinati.
I punti in questione sono $(0, 9)$ e $(\frac{3}{2}, 0)$. Risulta

$$f'(x) = \frac{12}{(2x-1)^2}$$

che per il primo punto risulta $f'(0) = 12$ e per il secondo risulta $f'(\frac{3}{2}) = 3$.
Pertanto le rette sono $y-9 = 12x \Rightarrow y = 12x+9$ e $y = 3(x-\frac{3}{2}) \Rightarrow y = 3x-\frac{9}{2}$.

Derivate di ordine superiore. Accelerazione.

Alcune funzioni hanno derivate di tutti gli ordini (ad es. polinomi, che si annullano da una certa derivata in poi, le funzioni seno e coseno che si ripetono ciclicamente, la tangente, e^x, il logaritmo, ecc.)

La retta normale ad un grafico è perpendicolare alla retta tangente, e quindi ha come coefficiente angolare $-\frac{1}{m}$. Perciò se la tangente al grafico di $f(x)$ nel punto $(x_0, f(x_0))$ non è orizzontale, la normale non è verticale, e il suo coefficiente angolare è $-\frac{1}{f'(x_0)}$.

Def. di punto di massimo relativo (*interno*): $f(x_0) \geq f(x)$
Analogamente, di minimo.

Massimo proprio se la maggiorazione è stretta.

Nei punti di massimo o minimo relativi (interni) la derivata (se c'è!) è nulla.
Dim.: il rapporto incrementale è ≥ 0 da una parte, è ≤ 0 dall'altra; se $\exists$ il limite, non può essere altro che 0.

Teor. di Rolle (con dim.) (p. 164)

Teor. di Lagrange: $\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c)$.
(niente dim.: interpretazione geometrica) (p. 166).

Se su intervallo la derivata è sempre nulla, la funzione è costante (cor. 56, p. 167).

Se su un intervallo due funzioni hanno la stessa derivata, esse differiscono per una costante (cor. 57).

Se una funzione ha derivata positiva in un intervallo, allora è crescente in senso stretto nell'intervallo (si basa sul teor. di Lagrange) (attenzione: se non siamo su un intervallo la tesi può non essere vera.)

Teorema sul segno della derivata prima: se la derivata cambia segno e passa da positiva a negativa, c'è un massimo, altrimenti c'è un minimo (prop. 61, p. 179).

Funzioni iperboliche e loro derivate (non ci sono sul libro):

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \qquad \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

L'una è la derivata dell'altra. La tangente iperbolica è il quoziente $\sinh x / \cos hx$, ed ha un andamento come l'arcotangente, solo che ha limiti -1 e +1 per $x \to \pm\infty$ rispettivamente.

Regola di L'Hôpital, accenno ai vari casi, senza nessuna dimostrazione. (p. 171)

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\log x}{x} = \text{ (H) } = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} = 0.$$

Del pari se ho $\sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}$.

Del pari $\frac{e^x}{x^3}$ per $x \to +\infty$.
Invece per $x \to -\infty$ NON siamo nel caso $\frac{0}{0}$; bisogna confrontare con x^k e derivando k volte il limite viene 0.

$$\lim_{x\to 0} \frac{x - \sin x}{\tan x - x}$$

si deriva due volte, e viene $\frac{1}{2}$.

Le forme $0 \cdot \infty$ si possono portare alla forma $\frac{0}{0}$:

$$\lim_{x\to 0^+} x \cdot lgx = \lim_{x\to 0^+} \frac{\lg x}{\frac{1}{x}}$$

e con la regola di L'Hôpital si vede che il limite è 0.

Stessa cosa se moltiplico per x^α con qualsiasi esponente $\alpha > 0$.

$$\lim_{x\to +\infty} x^\alpha - \log x$$

che è del tipo $\infty - \infty$ (vd. pag. 174). Mettiamo in evidenza x^α e occupiamoci soltanto della frazione $\frac{\log x}{x^\alpha}$ che abbiamo visto tendere a 0. Pertanto il tutto va a $+\infty$.

Se abbiamo un polinomio $P(x)$ e uno $Q(x)$ e si deve calcolare $\lim_{x\to +\infty} P(x) - \log Q(x)$, si mette in evidenza $P(x)$ e poi il limite viene infinito (vd. esempi pp. 174-175).

Del pari con funzioni del tipo $P(x) - e^x$ per $x \to +\infty$, viene $-\infty$.

Consideriamo adesso funzioni del tipo

$$f(x)^{g(x)} = e^{g(x)\log f(x)}$$

Ci troviamo davanti a situazioni del tipo $0^0,\ 1^\infty,\ \infty^0$

Ad esempio $lim_{x\to+\infty} x^{\frac{1}{x}}$.
L'esponente di e diventa $\frac{\log x}{x}$ che $\to 0$, e quindi il limite risulta 1.

Studiamo la funzione

$$f(x) = x\sqrt{x+1}$$

È definita per $x \geq -1$, tende a 0 per $x \to -1^+$, va all'infinito per $x \to +\infty$. La derivata si annulla in $x = -\frac{2}{3}$ ed abbiamo un minimo, guardando il segno della derivata.

A volte la regola di L'Hôpital non si può applicare subito, perché non dà risultato immediato.
Esempio (p. 176):

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}$$

Derivando si peggiorano le cose, e quindi non è opportuno. Ponendo invece $\frac{1}{x} = t$ si ha

$$\lim_{t\to-\infty} t^2 e^t = \lim_{t\to-\infty} \frac{t^2}{e^{-t}} = H = 0.$$

Studio della funzione

$$\frac{1-e^x}{e^{2x}+1}$$

Per $x \to +\infty$ si applica l'Hôpital, invece per $x \to -\infty$ la funzione tende a 1. La derivata si annulla in due punti, uno positivo e uno negativo (regola di Cartesio: una permanenza e una variazione). La funzione è positiva sul semiasse negativo, e negativa sul semiasse positivo, il grafico passa per l'origine, dove la derivata è negativa. Il punto di minimo è sul semiasse delle x positive, il punto di massimo è tra i reali negativi.

Studio della funzione

$$f(x) = \arctan\frac{1}{1-x^2}$$

Non è definita per $|x| = 1$, è pari, la studio solo per $x \geq 0$, per i reali negativi ha grafico simmetrico rispetto all'asse delle y. Ha limite per $x \to 1^+$ ed è $-\frac{\pi}{2}$; ha limite per $x \to 1^-$ ed è $+\frac{\pi}{2}$. Per $x \to \infty$ tende a 0 (mantenendo valori negativi).

Sono importanti tutti gli esempi da p. 168 a p. 183.

Defінzione di funzione convessa e di funzione concava in un intervallo: se in ogni punto dell'intervallo è al di sopra o al di sotto della tangente.

Definizione di punto di flesso e teor. sul massimo (o minimo) della derivata prima.

Studio della famiglia $f(x) = x^3 - ax$ al variare del parametro a.
Studiarne i grafici, con limiti, massimi, minimi, crescenze, decrescenze, flessi.
Studio della famiglia $f(x) = e^{ax^2}$ al variare del parametro a.

Studio della famiglia di funzioni $x^a \ln x$.

Studio di $f(x) = x\sqrt{1-x^2} = x\sqrt{(1-x)(1+x)}$; guardarne gli attacchi (= limiti della f').

Studio di

$$f(x) = \frac{(x-1)^2}{x}$$

Studio di $f(x) = \frac{x+\sin x}{x}$; questa chiaramente tende a 1, ma non ha il limite del rapporto tra le derivate e quindi non è applicabile la regola di L'Hôpital.

****

Non fanno parte del programma d'esame: le pagg. 146-161, il teor. 59 (p. 170), la dim. di pag. 171; §7.2 .