

MATEMATICA 1 a. a. 2007-2008

Ingegneria elettrotecnica e Ingegneria energetica

Prova d'esame dell'11.12.2007 **Tema A** Tempo concesso: 2 ore e mezza
N. B. - Le risposte vanno giustificate mediante dimostrazioni o controesempi

1. Studiare la funzione

$$x^3 \lg x$$

(insieme di definizione, immagine, continuità, derivabilità, crescita, decrescenza, massimi, minimi, flessi, limiti della derivata, eventuali asintoti, abbozzo del grafico).

2. Dire cosa significa

$$\lim_{x \rightarrow 4} f(x) = -6$$

e scrivere l'espressione di una funzione che gode di questa proprietà

Quando due infinitesimi si dicono "simultanei"? E quando due infinitesimi simultanei si dicono "non confrontabili"?

Si dia un esempio di due infinitesimi simultanei non confrontabili.

3. Data la funzione $f(x) = 1 - \cos^2(2x)$, dire quale polinomio di secondo grado la approssima meglio in un intorno di $x = 0$.
4. Dati gli insiemi $A = \{1, 12\}$, $B = \{x \in \mathbb{R} : 0 < x < 10\}$, $C = A \cup B$, dire se A , B e C hanno massimo, se hanno minimo, e in caso positivo, trovare tali eventuali massimi e minimi.
5. Enunciare e dimostrare il teor. di Rolle.
6. Data la funzione $f(x) = \lg |\lg |x - 1||$, dire se vi sono dei punti in cui il grafico non ha tangente e in caso positivo trovarli.
7. Calcolare l'area compresa tra l'asse x e il grafico di $x^2 \lg x$ per $1 \leq x \leq 4$.
8. Scrivere lo sviluppo di McLaurin della funzione

$$f(x) = \lg(1 + x^2)$$

9. Il grafico di una funzione derivabile f incontra l'asse delle x in un punto x_0 ed è $f'(x_0) = -3$. Si dica se f è infinitesima per $x \rightarrow x_0$, e in caso positivo, di che ordine. Giustificare le risposte.
10. Enunciare la regola di L'Hospital nel caso $\frac{\infty}{\infty}$. Esporre un caso concreto in cui una forma indeterminata del tipo 1^∞ è stata ricondotta ad una forma del tipo $0 \cdot \infty$ e quindi ad una del tipo $\frac{\infty}{\infty}$.
11. Avendo in mente il teor. di Torricelli e il grafico della funzione esponenziale, dimostrare che la funzione

$$F(x) = \int_0^x e^{\sin u} du - x$$

ha un minimo in $x = 0$.

12. Calcolare

$$\int_1^4 \frac{1}{x^2 + 2x + 3} dx.$$