

MATEMATICA 1 a. a. 2007-2008

Ingegneria elettrotecnica e Ingegneria energetica

Prova d'esame dell'11.12.2007 **Tema B** Tempo concesso: 2 ore e mezza

**N. B. - Le risposte vanno giustificate mediante dimostrazioni o controesempi**

1. Studiare la funzione

$$e^{|\frac{x-1}{x}|}$$

(insieme di definizione, immagine, continuità, derivabilità, crescita, decrescenza, massimi, minimi, flessi, limiti della derivata, eventuali asintoti, abbozzo del grafico).

2. Scrivere lo sviluppo di McLaurin della funzione

$$f(x) = \lg(1 + x^2)$$

3. Il grafico di una funzione derivabile  $f$  incontra l'asse delle  $x$  in un punto  $x_0$  ed è  $f'(x_0) = -3$ . Si dica se  $f$  è infinitesima per  $x \rightarrow x_0$ , e in caso positivo, di che ordine. Giustificare le risposte.
4. Enunciare la regola di L'Hospital nel caso  $\frac{\infty}{\infty}$ . Esporre un caso concreto in cui una forma indeterminata del tipo  $1^\infty$  è stata ricondotta ad una forma del tipo  $0 \cdot \infty$  e quindi ad una del tipo  $\frac{\infty}{\infty}$ .
5. Avendo in mente il teor. di Torricelli e il grafico della funzione esponenziale, dimostrare che la funzione

$$F(x) = \int_0^x e^{\sin u} du - x$$

ha un minimo in  $x = 0$ .

6. Calcolare

$$\int_1^4 \frac{1}{x^2 + 2x + 3} dx.$$

7. Dire cosa significa

$$\lim_{x \rightarrow 4} f(x) = -\infty$$

e scrivere l'espressione di una funzione che gode di questa proprietà

Quando due infinitesimi si dicono "simultanei"? E quando due infinitesimi simultanei si dicono "non confrontabili"?

Si dia un esempio di due infinitesimi simultanei non confrontabili.

8. Data la funzione  $f(x) = 1 - \cos^2(2x)$ , dire quale polinomio di secondo grado la approssima meglio in un intorno di  $x = 0$ .
9. Dati gli insiemi  $A = \{1, 12\}$ ,  $B = \{x \in \mathbb{R} : 0 < x < 10\}$ ,  $C = A \cup B$ , dire se  $A$ ,  $B$  e  $C$  hanno massimo, se hanno minimo, e in caso positivo, trovare tali eventuali massimi e minimi.
10. Enunciare e dimostrare il teor. di Rolle.
11. Data la funzione  $f(x) = \lg |\lg |x - 1||$ , dire se vi sono dei punti in cui il grafico non ha tangente e in caso positivo trovarli.
12. Calcolare l'area compresa tra l'asse  $x$  e il grafico di  $x^2 \lg x$  per  $1 \leq x \leq 4$ .