MATEMATICA 1 a. a. 2007-2008

Ingegneria elettrotecnica e Ingegneria energetica

Prova d'esame dell'11.12.2007 Tempo concesso: 2 ore e mezza

I due temi A e B erano uguali, salvo che nella funzione e nella definizione del limite; gli altri esercizi erano uguali ma messi in ordine diverso. Quanto segue riporta un abbozzo di soluzione per entrambe le funzioni; l'ordine degli altri esercizi segue il tema A. Sono commentati gli errori più frequenti riscontrati negli elaborati.

1. a) Studiare la funzione
$$x^3 \lg x$$
(insieme di definizione, immagine, continuità, derivabilità, crescenza, decrescenza, massimi, minimi, flessi, limiti della derivata, eventuali asintoti, abbozzo del grafico).
Sol.- Vd. l'es. 6 delle pagg. 182-184 del libro "Esercizi di Matematica A" di Antoniazzi-Pavarin-Zannol. Quasi tutti hanno trovato i limiti 0 e $+\infty$ per $x \to 0$ o ∞ rispettivamente. Molti meno hanno verificato che tra 0 e 1 la f è negativa e che si annulla in 0, e quindi porta un minimo nel punto $e^{-\frac{1}{3}}$ che vale $-\frac{1}{3e}$. Ancora meno hanno cercato il limite della derivata per $x \to 0$, che era 0, e quindi dava la certezza che in $[0,1]$ c'era un flesso. Pochissimi, anche annullando bene la derivata e trovando il minimo, hanno esplicitamente detto che l'immagine era $[-\frac{1}{3e}, +\infty[$. Qualcuo ha sbagliato a derivare, facendo il prodotto delle derivate.
b) Studiare la funzione
$$f(x) = e^{\left|\frac{x-1}{x}\right|}$$
Sol.- Vd il citato libro di esercizi, es. 7, pp.184-185. Parecchi hanno spezzato male il modulo (era come se non ci fosse per $x > 1$ e $x < 0$, valeva invece $-\frac{x-1}{x}$ tra 0 e 1). Vari hanno spezzato invece in 0 (soltanto). Anche tra chi si è accorto che in $x = 1$ c'era un minimo assoluto che valeva 1, NESSUNO ha guardato i valori delle semitangenti in tale punto angoloso. Qualcuno ha sbagliato la derivata, derivando come se il modulo non ci fosse. Qualcuno non ha trovato l'immagine, qualcuno ha detto che era tutta la semiretta dei positivi. Alcuni hanno studiato solo l'esponente, senza poi considerare l'esponenziale, e quindi avevano un asintoto orizzontale $y = 1$ invece che $y = e$, altri hanno creduto che $\lim_{x\to-\infty}$ dell'esponente fosse -1.

2. Dire cosa significa
$$\lim_{x\to 4} f(x) = \begin{cases} -6 \text{ Tema A} \\ -\infty \text{ Tema B} \end{cases}$$
e scrivere l'espressione di una funzione che gode di questa proprietà.
Quando due infinitesimi si dicono "simultanei"? E quando due infinitesimi simultanei si dicono "non confrontabili"?
Si dia un esempio di due infinitesimi simultanei non confrontabili.
Sol.- Le definizioni di limite sono state sbagliate spesso; molto frequentemente non è stato scritto $x \neq 4$. Come esempio del Tema B è stato spesso scritto un esempio in cui il limite $-\infty$ era solo da destra. Due infinitesimi si dicono *simultanei* se sono infinitesimi per $x \to x_0$ entrambi, senza che c'entri il limite del loro rapporto (cone invece vari hanno scritto). Invece molti hanno

scritto frasi fantasiose: “se esiste il loro rapporto”, “se vanno a 0 allo stesso modo”, “se vanno a 0 dello stesso ordine”, ecc. Altri hanno dato invece per “simultanei” la def. di infinitesimi dello stesso ordine, oppure del primo ordine. Due infinitesimi simultanei si dicono “non confrontabili” se il limite del loro rapporto non esiste (ad es. x e $x \sin \frac{1}{x}$). Alcuni hanno scritto “se non esiste il loro limite”, cosa assurda perché essendo infinitesimi, il loro limite esiste ed è 0. Altri nel dare l’esempio hanno confuso $\sin \frac{1}{x}$ con $\frac{1}{\sin x}$, o hanno detto che $\frac{\sin x}{x}$ non ha limite per $x \to 0$!!!

3. Data la funzione $f(x) = 1 - \cos^2(2x)$, dire quale polinomio di secondo grado la approssima meglio in un intorno di $x = 0$.
   Sol.- $4x^2$. O si vede che la funzione è $\sin^2 2x$, oppure si fanno le derivate del coseno quadrato. Alcuni hanno scritto $-4x^2$, mentre non poteva essere negativo; altri hanno scritto le derivate, ma non la hanno calcolate in $x = 0$, altri hanno fatto il quadrato dello sviluppo di Taylor del coseno dimenticando i doppi prodotti, altri ancora scrivendo tale sviluppo hanno quadrato solo x e non $2x$.

4. Dati gli insiemi $A = \{1, 12\}$, $B = \{x \in \mathbb{R} : 0 < x < 10\}$, $C = A \cup B$, dire se A, B e C hanno massimo, se hanno minimo, e in caso positivo, trovare tali eventuali massimi e minimi.
   Sol.- A ha minimo 1 e massimo 12, B non ha né minimo né massimo, C ha massino 12 e non ha minimo Alcuni, vedendo che il minimo di B non è 0, dicono cose errate, ad esempio che B ha minimo 1 e massimo 9.

5. Enunciare e dimostrare il teor. di Rolle.
   Sol.- L’enunciato è stato scritto da quasi tutti, la dim. da metà. Alcuni hanno detto che si trattava di un caso particolare del teor. di Lagrange, mentre invece la dim. di quest’ultimo sfrutta il teor. di Rolle, che quindi va dimostrato a prescindere dal teor. di Lagrange.

6. Data la funzione $f(x) = \lg |\lg |x-1||$, dire se vi sono dei punti in cui il grafico non ha tangente e in caso positivo trovarli
   Sol.- Il grafico ha tangente in tutti i punti nei quali esiste. Non esiste nei punti 0, 1, 2. Qualcuno ha fatto grafici (peraltro non richiesti), uno solo ha fatto il grafico giusto con la funzione che va a $-\infty$ in quei punti. Alcuni hanno fatto il grafico di $|\lg |x-1||$ che aveva dei punti angolosi e hanno detto che in tali punti non esisteva la tangente, ma non avevano fatto il logaritmo esterno, che non era definito in quei punti (e la funzione andava all’infinito per x che tendeva a quei punti).

7. Calcolare l’area compresa tra l’asse x e il grafico di $x^2 \lg x$ per $1 \le x \le 4$.
   Sol.- Tutti hanno capito che si doveva calcolare l’integrale della f tra 1 e 4, ma uno solo si è preoccupato di constatare che in quell’intervallo l’integranda era positiva, e quindi l’area era proprio misurata dall’integrale. Si integra per parti; uno ha fatto il prodotto delle primitive, altri hanno sbagliato l’integrale della primitiva per la derivata del fattore finito. Alcuni hanno fatto la derivata di x^2 invece che la primitiva.

8. Scrivere lo sviluppo di McLaurin della funzione

$$f(x) = \lg(1 + x^2)$$

Sol.- È $\lg(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + r(x)$ e quindi basta scrivere x^2 al posto di x. Tra quei pochi che hanno affrontato questo esercizio QUASI NESSUNO è andato al di là del termine di secondo grado.

9. Il grafico di una funzione derivabile f incontra l'asse delle x in un punto x_0 ed è $f'(x_0) = -3$. Si dica se f è infinitesima per $x \to x_0$, e in caso positivo, di che ordine. Giustificare le risposte.
   Sol.- È infinitesima: infatti è continua perché è derivabile e vale 0 nel punto, e quindi il limite per $x \to x_0$ è 0. È del primo ordine, perché il limite del rapporto $\frac{f(x)-0}{(x-x_0)^1}$ vale -3 e quindi è finito e diverso da 0. Alcuni hanno integrato la costante -3, dicendo che la funzione doveva essere la retta $y = -3x$ (orrore!) o $y = -3(x-x_0)$ (già meglio), mentre semplicemente la seconda retta (non la prima!) era la tangente al grafico, non già la funzione.

10. Enunciare la regola di L'Hospital nel caso $\frac{\infty}{\infty}$. Esporre un caso concreto in cui una forma indeterminata del tipo 1^∞ è stata ricondotta ad una forma del tipo $0 \cdot \infty$ e quindi ad una del tipo $\frac{\infty}{\infty}$.
    Sol.- Molti hanno scritto l'uguaglianza tra i due limiti, ma non hanno detto che il limite del rapporto tra le derivate è un'ipotesi, mentre l'esistenza del limite del rapporto tra le funzioni è una tesi del teorema. Il caso concreto poteva essere $(1+\frac{1}{x})^x$ come suggerito in classe; alcuni hanno proposto esempi di forme indeterminate che si risolvevano con l'Hospital, ma che NON erano del tipo 1^∞.

11. Avendo in mente il teor. di Torricelli e il grafico della funzione esponenziale, dimostrare che la funzione
    $$F(x) = \int_0^x e^{\sin u}\, du - x$$
    ha un minimo in $x = 0$.
    Sol.- Il teor. di Torricelli applicato al nostro caso dice che è $F'(x) = e^{\sin x} - 1$ e questa derivata vale 0 in $x = 0$, è < 0 in un intorno sinistro dello 0, è > 0 in un intorno destro, e quindi in 0 c'è un minimo (che vale 0). Alcuni tra quei pochi che hanno iniziato questo ragionamento si sono fermati a dire che per $x > 0$ tale derivata era positiva, senza guardare cos succedeva per $x < 0$ (e senza dire che questa positiviità non c'era sempre per $x > 0$, ma solo i un intorno). Pareccchi invece hanno creduto di rispondere al quesito dimostrando (in genere bene) il teor. di Torricelli. L'es. 35 di p. 231 del testo citato, con soluzione a p. 242, risolve una situazione ancora più generale, trovando tutti i massimi e i miniimi della F, non soltanto il minimo in 0.

12. Calcolare
    $$\int_1^4 \frac{1}{x^2+2x+3}\, dx.$$
    Sol.- Vd es. 58 di p. 217. Lo scrivere 3=1+2 e qundi riconoscere che al denominatore c'era $(x+1)^2+2$ era stato suggerito in classe. Parecchi non hanno diviso per $\sqrt{2}$ quando hanno trovato l'arcotangente di $\frac{x+1}{\sqrt{2}}$ come primitiva. Vari nel calcolo specifico hanno poi scritto $x-1$ al posto di $x+1$ (errore diffusosi per copiatura?).