MATEMATICA 1 a. a. 2007-2008

Ingegneria elettrotecnica e Ingegneria energetica

Prova d'esame dell'8.1.2008 Tempo concesso: 2 ore e mezza

N. B. - Le risposte vanno giustificate mediante dimostrazioni o controesempi

Abbozzo di soluzioni - I due temi A e B vengono qui risolti insieme; vari esercizi erano uguali. Le pagine si riferiscono al testo di G. Artico.

1. Studiare la funzione
$$f(x) = \sin x(1 + \cos x)$$
(insieme di definizione, immagine, continuità, derivabilità, crescenza, decrescenza, massimi, minimi, flessi, limiti della derivata, eventuali asintoti, abbozzo del grafico).
Sol. - La funzione è completamente risolta alle pagg. 181-182.

2. Studiare la funzione
$$f(x) = x\sqrt{4x - x^2}$$
(insieme di definizione, immagine, continuità, derivabilità, crescenza, decrescenza, massimi, minimi, flessi, limiti della derivata, eventuali asintoti, abbozzo del grafico).
Sol. - La funzione è completamente risolta alle pagg. 203-205.

3. Scrivere lo sviluppo di McLaurin della funzione
$$f(x) = \arctan x^2$$
fino al termine di terzo grado.
Sol.- Basta scrivere lo sviluppo di $\arctan t$ e poi sostituire x^2 al posto di t. Evidentemente lo sviluppo considerato ha soltanto termini di grado pari e siccome i primi termini dello sviluppo dell'arcotangente sono del primo e del terzo grado, i primi termini dello sviluppo cercato sono del secondo e sesto grado. Lo sviluppo era richiesto fino al terzo e quindi basta il polinomio di secondo, che è x^2.

4. Il grafico di una funzione derivabile f incontra l'asse delle x in un punto x_0 ed è $f'(x_0) = 23$. Si dica se f è infinitesima per $x \to x_0$, e in caso positivo, di che ordine. Giustificare le risposte.
Sol.- Ovviamente è un infinitesimo, perché è continua e incontrando l'asse delle x ha anche limite 0 per $x \to x_0$. Poiché la sua derivata è finita e diversa da 0, vuole dire che l'inifinitesimo è del primo ordine.

5. Enunciare la regola di L'Hospital nel caso $\frac{0}{0}$. Esporre un caso concreto in cui una forma del tipo 0^0 è stata ricondotta ad una forma del tipo $0 \cdot \infty$ e quindi ad una del tipo $\frac{0}{0}$.
Sol.- Vd. p.170. Un esempio del tipo cercato poteva essere x^x che si trasforma in $e^{x \lg x}$ e l'esponente è del tipo $0 \cdot \infty$ che si trasforma, dividendo sopra e sotto per $\lg x$, in una forma del tipo $0/0$.

6. Calcolare poi il limite
$$\lim_{x\to 1} x^{\frac{1}{x-1}}$$
Sol.- Questo è della forma 1^∞, ed è risolto a p. 176.

7. Calcolare
$$\int \frac{1}{x^2-4x+5}\,dx.$$
Queste primitive sono definite su tutto l'asse reale? Sono funzioni limitate?
Sol.- Basta scrivere il denominatore come $(x-2)^2+1$, e le primitive risultano $\arctan(x-2)+c$, le quali sono tutte defite su tutto l'asse reale e, come tutte le arcotangenti, sono limitate tra $c-\pi/2$ e $c+\pi/2$.

8. Dire cosa significa
$$\lim_{x\to -2} f(x) = +\infty$$
e scrivere l'espressione di una funzione che gode di questa proprietà
Quando due infinitesimi si dicono "simultanei"? E quando due infinitesimi simultanei si dicono "non confrontabili"?
Si dia un esempio di due infinitesimi simultanei non confrontabili.
Sol.- La def. di questo tipo di limite è a p. 76, dove si sostituisca -2 al generico x_0. Un esempio può essere $1/(x+2)^2$, oppure $1/|x+2|$. Due infinitesimi si dicono simultanei se sono infinitesimi per x che tende allo stesso x_0 (o ∞); si dicono "non confrontabili" se il limite del loro rapporto non esiste. .

9. Dati gli insiemi $A=\{0,12\}$, $B=\{x\in\mathbb{R} : 0<x<10\}$, $C=A\cap B$, dire se A, B e C hanno massimo, se hanno minimo, e in caso positivo, trovare tali eventuali massimi e minimi.
Sol.- A ha minimo 0 e massimo 12, B non ha né minimo né massimo, C è vuoto (e quindi non ha né minimo né massimo).

10. Si dia la definizione di maggiorante e di minorante di un insieme I della retta reale.
Dati gli insiemi $A=[0,+\infty)$, $B=\{x\in\mathbb{R} : 0<x\le 10\}$, $C=A\cap B$, dire se A, B e C hanno maggioranti, minoranti, massimo, minimo, e in caso positivo, trovare tali eventuali massimi e minimi.
Sol.- Maggiorante di un insieme I è un numero reale maggiore o uguale a tutti gli elementi di I (minorante: minore o uguale). A ha minoranti ed ha minimo 0, e non ha maggioranti; B ha minoranti (ad es. 0) e maggioranti (ad es. 10), non ha minimo ed ha massimo 10; C coincide con B.

11. Enunciare il teor. di Weierstrass. Citare un altro teorema nella cui dimostrazione è stato utilizzato.
Sol.- Per l'enunciato vd. p. 100. Un teorema in cui è stato utilizzato è ad esempio il teor. di Rolle.

12. Enunciare il teor. di Rolle. Citare un altro teorema nella cui dimostrazione è stato utilizzato.
Sol.- L'enunciato è a p. 164. È stato utilizzato nella dimostrazione del teor. di Lagrange.

13. L'integrale definito non coincide sempre con un'area. Si dica sotto quali ipotesi questa coincidenza sussiste.
Sol.- Se la funzione integranda è continua e positiva, e il primo estremo è minore del secondo.

14. Calcolare l'area compresa tra l'asse x e il grafico di $\arcsin x$ per $0 \leq x \leq 1$. L'area può essere finita anche se la derivata dell'arcoseno è infinita per $x \to 1$?
Sol.- Bisogna trovare una primitiva dell'arcoseno, calcolarla in 1, in 0 e poi fare la differenza. Le primitive sono (vd. p. 243):

$$x \arcsin x + \sqrt{1 - x^2} + c$$

da cui l'area vale $\pi/2 - 1$. L'area può essere finita anche se la derivata è infinita, e quanto sopra è un esempio (l'integrabilitá di una funzione non ha relazione con la derivabilità).