M178sett.tex

**8a settimana**

Inizio 19/11/2007

19.11.2007

Integrali definiti su un intervallo chiuso e limitato. Area del trapezoide. Integrale di una funzione continua e positiva: suddivisione dell'intervallo in sottointervalli, massimo e minimo della funzione in tali sottointervalli. Somma inferiore e somma superiore.
Preso comunque un reale $\epsilon > 0$ esiste una suddivisione tale che la somma superiore e la somma inferiore differiscano per meno di $\epsilon$.

Definizione di integrale nel caso di una funzione di segno variabile.

Definizione di integrale nel caso in cui $a = b$ e nel caso $b < a$. (10.1.1)
Risulta comunque $\int_a^b k \; dx = k(b - a)$.

L'integrale definito è un numero, e non dipende dalla lettera con cui si indica la variabile (p. 269, oss. 3).

Additività, linearità e "isotonia" dell'integrale definito (pp. 270-271).
Definizione di continuità generale: una funzione si dice *generalmente continua* se è continua salvo che in un numero finito di punti.
Se una funzione è generalmente continua e nei punti di discontinuità esiston oi limiti destro e sinistro, la definizione di integrale è intuitiva come somma degli integrali fatti sugli intervalli in cui la funzione è continua avendo prolungato per continuità, a destra e a sinistra, nei punti in cui non è continua.

Calcolo di aree quando la funzione è positiva. Calcolo di integrali (che non cincidono con aree) quando la funzione è di segno variabile .
ARea di un porzione di piano compresa tra due curve (prop. 77, senza dim.)

Calcolo di integrali di funzioni dispari e di funzioni pari su intervalli simmetrici rispetto all'origine. Indipendentemente dalla funzione, i primi venongo 0 e gli altri vengono il doppio del corrispondente integrale da 0 a $b$.

Teorema della media integrale per una funzione continua (con dim.): la media integrale è (ovviamente!) compresa tra il minimo e il massimo della funzione nell'intervallo. Ma tale media è certamente un valore della funzione, per cui $\exists\ c \in [a, b]$ tale che:

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) \; dx = f(c).$$

Definizione di funzione integrale $F(x)$.

20.11.2007 - martedì

Teorema di Torricelli: la funzione integrale è una primitiva di una $f$ (continua!) (con dim.) (teor. 79)

Teor. fond. del calcolo integrale.
Dim. - Poiché ogni primitiva $\phi(x)$ è del tipo $F(x) + k$, dove ovviamente $\phi(a) = k$, ed è $\phi(b) = F(b) + k = F(b) + \phi(a)$ risulta che l'integrale tra $a$ e $b$ della $f$ è uguale alla differenza tra i valori $\phi(b)$ e $\phi(a)$, e si scrive

$$\int_a^b f(x)\ dx = \phi(b) - \phi(a) = [\phi(x)]_a^b$$

(Si noti che se si prende un'altra primitiva la costante additiva si elimina).

Alcuni facili esempi (integrazione tra 0 e 1 oppure tra -1 e 1, o su $[0, \pi]$) di polinomi, di $\sin x$, $\tan x - \sin x$, di $\lg x$, $x \cos x$ per parti, di $x^2 \sin x$ per parti ripetuta, di $x^3 e^x$ per parti ripetuta.

Studiare i casi particolari da p. 275 a p. 279.

$$\int_{-1}^1 \sqrt{1 - x^2}\ dx$$

La f è pari, calcoliamo l'integrale partendo da 0 e raddoppiamo. Poniamo

$$x = \sin t \qquad \text{da cui} \qquad dx = \cos t dt$$

La radice è positiva, il coseno del pari tra 0 e 1, per cui al posto della radice possiamo scrivere $\cos x$ (vd. es. p. 245).
L'integrale del coseno al quadrato l'abbiamo già trovato e fa

$$\frac{t + \cos t \sin t}{2} + c$$

e quindi riscrivendo $\arcsin x$ al posto di $t$ e ovviamente $\sqrt{1 - x^2}$ al posto di $\cos t$ abbiamo

$$\int_{-1}^1 \sqrt{1 - x^2}\ dx = 2\Big[\frac{\arcsin x + x\sqrt{1 - x^2}}{2}\Big]_0^1 = \frac{\pi}{2}$$

Il metodo di sostituzione è preferibilmente usato tra gli integrali indefiniti; prima trovare la primitiva evventualmente tramite una sostituzione, dopo risostituire la $x$ e soltanto allora calcolare nella primitiva in cui c'è la $x$ i valori in $b$ e in $a$.

Dati iniziali: trovare quella primitiva $g(x)$ che in un certo punto, ad esempio $x_0$ vale $g(x_0) = g_0$ (10.6).
Poiché le primitive differiscono per una costante, questa si determina quando si fissa un valore in un certo punto.
La primitiva di $\cos x$ che passa per il punto (0,0) è $\sin x$, quella che passa per il punto $(0, 3)$ è $\sin x + 3$.

Tra le primitive di $x^4$ trovare quella il cui integrale tra -1 e 1 fa 0. È ovviamente $x^5/5$; trovare invece quella il cui integrale tra -1 e 1 fa 10.
Dovrò porre

$$\int_{-1}^{1} (\frac{x^5}{5} + c)\ dx = 10$$

il che dà $c = 5$.

Tra le primitive di $x \cos x$ trovare quella che nel punto 0 vale -2 (vd. Esempio di p. 290).

Integrale generalizzato.
Liberiamoci della continuità della funzione: integrale generalizzato (def. 81, p. 294).

Confronto tra $\frac{1}{\sqrt{x}}$ e $\frac{1}{x}$ vicino a $0^+$.

Integrazione su intervalli illimitati. Esempi (pp. 296-298)

****************************************

Non fanno parte del programma di esame: dim. della prop. 77; § 10.4 esclusa l'osservazione di p. 282; § 10.5; i problemi delle pagg. 291-293. Da 298 fino alla fine del libro.