M179sett.tex

9a settimana

Inizio 26/11/2007

26.11.2007 - lunedì

Esercitazione in classe in vista della seconda prova parziale.
(vd M17siII.pdf e M17siIIsol.pdf)

27.11.2007 - martedì

Commento e soluzioni dell'esercitazione.
Ripresa degli infinitesimi e delle loro parti principali.

Serie numeriche: successione di numeri e successione delle somme parziali.
La *serie* è un'operazione che consta di due passi:
1) trasformazione di una successione $\{a_n\}$ in una successione di somme parziali $\sum_{n=1}^{k} a_n$;
2) esplorazione dell'esistenza del limite per $k \to +\infty$ della successione di somme parziali.

Se tale limite esiste finito, la serie si dice *convergente*, se tale limite è infinito si dice *divergente*; se tale limite non esiste la serie si dice *indeterminata*.

Considerazione delle serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \qquad \text{(divergente)}$$

,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \qquad \text{(convergente)}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \qquad \text{(convergente)}$$

tramite confronto con le funzioni $1/x$ (non sommabile tra 1 e $+\infty$), $\frac{1}{2^x}$ e $1/x^2$ (sommabili tra 1 e $+\infty$).

È invece indeterminata la serie proveniente dalla successione $\{(-1)^n\}$ che ha come successione di somme parziali: -1, 0, -1, 0, -1, 0, ...

Accenno alle serie di funzioni (non appartiene al programma d'esame): data una successione di funzioni $\{f_n(x)\}$ in ogni punto x_0 in cui le funzioni sono definite è determinata una serie numerica $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x_0)$. A seconda del

punto x_0 tale serie può essere convergente, divergente, indeterminata.
La serie proveniente dalla formula di Taylor viene scritta

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

La differenza tra questa *serie* (detta *serie di Taylor*) e invece la *formula* di Taylor è che il resto, che era un infinitesimo di ordine superiore all'ultimo termine che compariva esplicitamente, è stato scomposto in una serie di infinitesimi. Le serie di McLaurin (serie di Taylor calcolate nel punto $x = 0$) che abbiamo studiato(seno, coseno, esponenziale, arcotangente) sono tutte convergenti in ogni punto della retta. Invece la serie della tangente non converge al di fuori dell'intervallo aperto $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.

Ripresa del corollario del teor. di Lagrange che parla di un funzione che ha per derivata la funzione nulla: essa è costante *se siamo su un intervallo.* Verifica con la funzione

$$\arctan x + \arctan \frac{1}{x}$$

che ha derivata nulla su entrambe le semirette, ed ha valori costanti, ma diversi, su entrambe ($\pm\frac{\pi}{2}$ rispettivamente).

Integrali di una funzione razionale fratta: caso in cui il denominatore è scomponibile in fattori di primo grado, caso in cui è scomponibile in un fattore di primo grado e un fattore del tipo $(x - \alpha)^2$.

28.11.2007 - mercoledí

Ripresa degli integrali di una funzione razionale fratta:
caso in cui il denominatore è un polinomio di secondo grado irriducibile, dapprima del tipo $k + x^2$, che diventa $k\left[1 + (\frac{x}{\sqrt{k}})^2\right]$, quindi una riduzione a questo caso quando il denominatore è $x^2 + x + 1$. In quest'ultimo caso (particolare) si considera il termine con x come il doppio prodotto $2\frac{x}{2}$ e si scrive $x^2 + 2\frac{x}{2} + \frac{1}{4} + \frac{3}{4}$ i primi tre termini formano un quadrato perfetto, e ci si è ricondotti al caso precedente.

Studio di primitive: riconoscere che le primitive di $\sin 2x$ si possono scrivere in più modi: $\sin^x$, $-\cos^2 x$, $-\frac{\cos 2x}{2}$ e riconoscere le costanti per le quali si differenziano (si ricordi che è $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$).

Data una famiglia di primitive, individuare quella che soddisfa una certa condizione, ad es $G(0) = g_0$. La famiglia ha una costante c che viene calcolata imponendo la condizione.

Studio qualitativo di un polinomio di terzo grado, tramite lo studio della sua derivata e del segno dei massimi e dei minimi: se questi sono di segno opposto il polinomio ha tre zeri (uno ce ne ha di sicuro, per il teor. di tutti i valori).

Dato il grafico di una funzione, costruzione grafica di una sua primitiva.

Studio della funzione $\frac{e^{-\frac{1}{2x}}}{\sqrt{x+1}}$ e studio dei limiti destro e sinistro dell'esponente per $x \to 0$. Considerazione su infiniti e infinitesimi.

Studio dell'integrale $\int xe^{-\frac{x^2}{2}}\ dx$.
Studio delle primitive di e^{1-2x} (a quiz: quale delle seguenti funzioni è una sua primitiva?)

Studio della funzione e^{-x^2} e di come *non sia possibile* scrivere una sua primitiva, comunque certamente esistente, tramite funzioni elementari.

Segue qui un esercizio non svolto in classe, ma applicazione importante e riassuntiva del teor. di Torricelli e di vari altri teoremi; utile ricapitolazione per la preparazione all'esame.

Studio della funzione $f(x) = \int_0^x u^2 \arctan u\ e^{-u^2}\ du$.
È impossibile trovare una espressione esplicita della f, però si possono acquisire delle informazioni. La funzione è definita per tutti gli x, vale 0 in 0; la sua derivata f' coincide con l'integranda (teor. di Torricelli), e quindi vale 0 in $x = 0$, è negativa per gli $x < 0$ e positiva per gli $x > 0$. La f ha quindi un minimo in 0, che vale 0, ed è sempre positiva altrove. La f' è dispari, quindi f è pari, quindi f è decrescente per gli x negativi, crescente per gli x positivi. La f' vale 0 in $x = 0$ e per $x \to 0$ è un infinitesimo del terzo ordine, con parte principale x^3 (l'esponenziale va a 1, e la parte principale dell'arcotangente è x). Pertanto la f in un intorno dello 0 si comporta come $\frac{x^4}{4}$. Inoltre f' tende a 0 per $x \to \infty$ (da sopra per $x \to +\infty$, da sotto per $x \to -\infty$); pertanto tale derivata deve avere (almeno) un massimo sulla semiretta dei positivi e (almeno) un minimo su quella dei negativi. In tali punti (che sono simmetrici rispetto all'origine) la f ha dei flessi. La funzione è certamente convessa in un intorno dello 0 (assomiglia a $\frac{x^4}{4}$), ed è certamente concava quando $x \to \pm\infty$. La f ha limite finito per $x \to \pm\infty$: infatti l'integranda è sommabile (l'esponenziale schiaccia tutto a 0 più forte di $\frac{1}{x^2}$, che è sommabile). Pertanto esiste finito il numero $I = \int_0^{+\infty} u^2 \arctan u\ e^{-u^2}\ du$, e la retta $y = I$ è quindi un asintoto orizzontale.

(Applauso finale)