MATEMATICA 1 - Ing. Elettrotecnica e Ing. Energetica
Prova parziale del 7.12.2007 **Tema A** Tempo concesso: 75 minuti
Le risposte devono essere giustificate.
Abbozzo di soluzioni con gli errori più frequenti

1. Calcolare
$$\int \frac{e^x}{e^{2x}+2}\,dx$$
Tra queste primitive ce n'è una che vale -2 nel punto $x=0$?
Quanto vale l'integrale definito $\int_1^0 \frac{e^x}{e^{2x}+2}\,dx$?
Sol. - Ponendo $e^x = t$ si aveva $e^x\,dx = dt$ e quindi l'integrale diventava $\int \frac{1}{t^2+2}\,dt$. Alcuni hanno seplicemente sotituito dx con dt. Poi nell'arcotangente che veniva come primitiva non hanno saputo gestire il fattore $\frac{1}{\sqrt{x}}$.

2. Studiare la funzione
$$f(x) = \arctan\frac{x+1}{x-1}$$
(ins. di def., limiti, immagine, continuità, derivabilità, crescenza, massimi, minimi, asintoti, limiti della derivata, grafico).
Sol.- La funzione non era definita in $x=1$, i limiti erano $\pm\pi/2$ dalle due parti, quindi diversi e non c'era prolungabilità. All'infinito tendeva a $\pi/4$; derivata negativa, decrescente sulle due semirette singolarmente prese (non su tutto l'i.d.d.). Quasi nessuno ha specificato l'immagine che era l'intervallo aperto $]-\pi/2,\pi/2[$ *privato del punto* $\pi/4$. Nonostante fossero esplicitamente richiesti i limiti della f' quasi nessuno ha notatao che per $x\to 1$, era $f'\to -1/2$. Quasi nessuno, nel calcolo della derivata, l'ha semplificata portandola a $-\frac{1}{x^2+1}$, che quindi aveva evidentemente un minimo per $x=0$, che dava un flesso per la f; peraltro quasi nessuno ha notato che $f'\to 0$ per $x\to\pm\infty$, e che valeva $-1/$ per $x=0$ e poi risaliva verso $-1/2$ e quindi un minimo ci doveva pur essere nella semiretta $(-\infty,1]$. Qualcuno ha trovato per la f dei limiti infiniti, mentre l'arcotangente è limitata..

3. Enunciare e dimostrare il teor. di Torricelli.
In quale punto della dimostrazione interviene il fatto che l'integranda è continua?
Sol. - Quasi nessuno ha notato che il punto cruciale dove interviene la continuità dell'integranda è nel passaggio $\lim_{h\to 0} x_h = x \Rightarrow f(c_h)\to f(x)$.

4. Quale è il polinomio di quinto grado che meglio approssima la funzione $x-\tan x$ in un intorno dello 0?
Sol. - Vari si sono tenuti il resto, che ovviamente non c'entra con un polinomio che approssima, vari hanno trovato delle potenze pari ....

5. Una funzione f è sommabile su $[a, b]$. Può avere dei punti in cui non è continua? Può avere dei punti in cui in cui va all'infinito? Può avere dei punti in cui la sua derivata va all'infinito?
   Fare una dimostrazione oppure utilizzare degli esempi.
   Sol. - $\frac{1}{|x|}$ è un esempio di tutte le tre situazioni; alcuni hanno dorrettamente presentato una funzione non continua in un punto, ma con limiti finiti destro e sinistro disuguali.

6. Esiste una funzione continua e positiva su un intervallo $[a, b]$, il cui integrale è negativo? Se sì, fare un esempio, se no, dire perché
   . Sol. - Esiste certamente, basta che sia $b < a$.

7. Sia $f(x)$ una funzione derivabile e positiva, definita sulla semiretta $[2, +\infty)$. Per ciascuno dei seguenti asserti si dica se è vero o falso:
   a) la funzione non è mai sommabile sulla semiretta
   c) la funzione può essere sommabile solo se tende a 0 per $x \to +\infty$
   d) la funzione è sommabile se sulla semiretta assume sempre valori minori di $\frac{1}{x^2}$
   e) la funzione è sommabile solo se sulla semiretta assume sempre valori minori di $\frac{1}{x^2}$.
   Sol. - a) è falsa, ci sono funzioni come $1/x^2$ sommabili;(la b) manca per errore); c) la funzione non ha l'obbligo di tendere a 0, può essere costituita da delle "spine" sempre più sottili e tali che l'integrale risulti finito, Però se ha un limite, questo deve essere 0. d) è vera per il teor del confronti, mentre e) è falsa: $2/x^2 > 1/x^2$, eppure è sommabile su $[2, +\infty[$.

8. Si scriva lo sviluppo di MacLaurin della funzione

   $$e^{5x} - 1 - 5x$$

   fino al termine di quarto grado. Di che ordine risulta il resto?
   Sol. Alcuni hanno scritto che il resto è del 5^0 ordine, mentre so solo che è di ordine > 3.