MATEMATICA 1 - Ing. Elettrotecnica e Ing. Energetica

Prova parziale del 7.12.2007 **Tema B** Tempo concesso: 75 minuti

Le risposte devono essere giustificate.

Abbozzo di soluzioni ed errori frequenti riscontrati negli elaborati

1. "Tutte le primitive di una funzione continua differiscono per una costante." In base a quale teorema e sotto quali ipotesi questo asserto è vero?
   Sol.- Corollario n. 56 (p. 167) del teor. di Lagrange, che vale solo se siamo su un intervallo. Molti hanno confuso con l'affermazione inversa, che la derivata di una costante è 0 (vd. nota 4, p. 56).

2. Studiare la funzione
   $$f(x) = \lg \frac{x+1}{x-1}$$
   (ins. di def., limiti, immagine, continuità, derivabilità, crescenza, massimi, minimi, asintoti, limiti della derivata, grafico).
   Sol.- La funzione è definita solo per $x \notin]-1,1[$, va a $-\infty$ per $x \to -1^-$, a $+\infty$ per $x \to 1^+$, tende a 0 per $x \to \pm\infty$. Vari hanno scritto che si tratta di due rami di iperbole, cosa non vera (solo ci assomigliano); quasi nessuno ha scritto che $y = 0$ è un asintoto orizzontale, quasi nessuno ha trattato i limiti della derivata (esplicitamente richiesti), quasi nessuno ha scritto che l'immagine (esplicitamente richiesta) era $\mathbb{R} \setminus 0$. La derivata è $f'(x) = -\frac{2}{x^2-1}$, la quale come funzione esiste anche nell'intervallo $]-1,1[$, ma lì *non è* la derivata di f! La f' è sempre negativa, ma solo pochi hanno scritto che questo significa che la funzione è decrescente solo su ciascuna delle due semirette, ma *non* nel suo intero insieme di definizione.

3. La funzione $F(x) = \int_0^x u^2 \cos u \, e^{-u} \, du$ ha limite finito per $x \to +\infty$? Giustificare la risposta.
   Sol.- L'integranda tende fortemente a 0 (più di $\frac{1}{u^2}$ che abbiamo scelto come modello) per $u \to +\infty$ e quindi risulta sommabile sulla semiretta dei positivi e quindi la F risulta avere limite finito per $x \to +\infty$. (Ovviamente, dato che non era richiesto, nessuno ha guardato cosa succede per $x < 0$; l'integranda risulta sommabile anche sulla semiretta dei negativi). Qualcuno ha creduto che l'argomento del coseno comprendesse anche e^u nonostante fosse stato scritto chiaro alla lavagna che il coseno comprendeva solo u. Molti hanno confuso la sommabilità dell'integranda con quella della F; molti hanno creduto che bastasse che l'integranda tendesse a 0 per $u \to +\infty$ per renderla sommabile.

4. Tra le primitive di $f(x) = x^2 \cos x$ trovare quella che vale 1 per $x = 0$.
   Sol.- Integrazione per parti, scegliendo x^2 come fattore finito. Le primitive erano $x^2 \sin x + 2x \cos x - 2 \sin x + c$ e quella specifica portava $c = 1$.

Alcuni hanno scelto male il fattore finito, e quindi non sono riusciti ad andare avanti, perché l'integrale veniva sempre più complicato.

5. Una funzione dispari e derivabile ha la derivata pari. Se una funzione continua è pari, tutte le sue primitive sono dispari? Giustificare la risposta!
   Sol.- Parecchi (ma non tutti!) si sono accorti che una sola delle primitive poteva essere dispari e che aggiungendo ostanti la disparità non ci poteva essere più.

6. Si dia la definizione di *parte principale* e *parte complementare* di un infinitesimo. Si scrivano quindi le parti principali degli infinitesimi per $x \to 0$
$$x - \sin x \cos x, \quad \tan x - \sin x^2$$
   Sol.- Le definizioni sono state date spesso in modo molto impreciso: la parte principale è $\ell(x - x_0)^k$, cioè un monomio solo, senza il resto. Alcuni scrivono che un infinitesimo *è uguale* alla sua parte principale. Alcuni hanno pasticciato nel fare il prodotto tra sviluppi di McLaurin, facendo diventare pari funzioni che erano dispari. Il primo infinitesimo risulta del terzo ordine, il secondo ha come parte principale x.

7. Enunciare e dimostrare il teorema della media integrale.
   Sol- Fatto bene da quasi tutti.

8. Calcolare il seguente integrale indefinito:
$$\int \left(\frac{1}{x(\lg x)^{\frac{2}{3}}} + x \sin x \right) dx$$
   Sol.- $3(\lg x)^{1/3} - x \cos x + \sin x + c$. Vari hanno pasticciato sulla primitiva del logaritmo al denominatore, mettendo esponenti o coefficienti errati.