MATEMATICA 1 - Ing. Elettrotecnica e Ing. Energetica

Prova parziale del 7.12.2007 **Tema C** Tempo concesso: 75 minuti

Le risposte devono essere giustificate.

Abbozzo di soluzioni ed errori frequenti riscontrati negli elaborati

1. Studiare la funzione
$$f(x) = \frac{x-2}{\lg(x-2)}$$
(ins. di def., limiti, immagine, continuità, derivabilità, crescenza, massimi, minimi, asintoti, limiti della derivata, grafico).
Sol.- La funzione è definita per $x > 2, x \neq 3$, tende a $-\infty$ per $x \to 3^-$ a $+\infty$ per $x \to 3^+$, a $+\infty$ per $x \to +\infty$, a 0 per $x \to 2^-$. Non tutti si sono accorti che la funzione non era definita per $x = 3$, ha minimo per $x = 2 + e$ che vale e; nonostante fosse esplicitamente richiesto, quasi nessuno ha detto che l'immagine era $\{(-\infty, 0[\cup[e, +\infty)\}$. Nonostante fosse esplicitamente richiesto, quasi nessuno si è preoccupato di dire che la derivata tendeva a 0, oltre che per $x \to 2^+$, anche per $x \to +\infty$; da ciò si indovinava che tra il punto di minimo e l'infinito ci doveva essere un punto in cui la derivata aveva il suo massimo, il che comportava l'esistenza di un flesso in tale semiretta. Qualcuno ha applicato l'Hôpital a $\frac{1}{0}$, qualcuno ha scritto che la derivata del numeratore era -2, qualcuno ha scritto che la derivata del quoziente era il quoziente delle derivate....

2. Tra le primitive della funzione $f(x) = x^2 \ \arctan x$ si trovi quella che nel punto $x = 0$ vale 2.
Sol.- La primitiva cercata era $\frac{x^3}{3} \arctan x - \frac{1}{6}x^2 + \frac{1}{6}\lg(x^2 + 1) + 2$. Qualcuno ha preso male il fattore finito, qualcuno ha integrato male l'x^2. qualcuno ha creduto per per $x = 0$ sia $\lg(x^2 + 1) = -\infty$.

3. Si dia la definizione di *parte principale* e *parte complementare* di un infinitesimo. Si scrivano quindi le parti principali degli infinitesimi per $x \to 0$
$$x \ \cos x - \sin x \cos x, \quad \tan^2 x - \sin x$$
Sol.- Le parti principali erano rispettivamente $\frac{x^3}{3!}$ e $-x$ (il coseno era in evidenza e tende a 1 per $x \to 0$, e $x - \sin x$ è stato visto più volte a lezione; del pari è stato visto lo sviluppo della tangente). Definizioni spesso imprecise, qualcuno scrive che gli infinitesimi *sono uguali* alle loro parti principali.

4. Una funzione che possiede tutte le derivate ha necessariamente un flesso dove si annulla la derivata seconda?
Se sì, dimostrarlo, se no, dare un controesempio.

Sol.- Non è vero: controesempio: x^4. Alcuni hanno messo come controesempio e^x che non ha punti in cui la derivata si annulla, e quindi non c'entra; altri hanno dato esempi come $\sin x$ che invece per caso ha proprio un flesso dove la derivata seconda si annulla. Altri hanno detto che funzioni banalissime non avrebbero tutte le derivate....

5. Sia f una funzione continua definita sull'intervallo $[a, b]$ e la cui immagine è contenuta nell'intervallo $[a, b]$.
   L'immagine è un intervallo?
   Ricordando il teorema degli zeri, dimostrare che esiste almeno un punto x_0 in cui è $f(x_0) = x_0$.
   Sol.- Nessuno l'ha fatto bene; i migliori hanno enunciato bene il teorema degli zeri o il teor. di tutti i valori; molti hanno risposto bene che l'immagine è un intervallo. Molto banalmente consideriamo $f(x) - x$: nel punto a è certamente $f(a) - a \geq 0$ perché, data la nostra ipotesi, l'immagine non può avere valori minori di a; analogamente deve essere $f(b) - b \leq 0$; pertanto la funzione $f(x) - x$ ha valore positivo o nullo in a e negativo o nullo in b, e per il teor. degi zeri....

6. Data una funzione $f(x) = g(x) + h(x)$ che ha integrale finito in un intervallo $[a, +\infty)$, dire se sono veri o falsi (con dimostrazioni e controesempi) i seguenti asserti
   a) la funzione f è limitata su $[a, +\infty)$;
   b) la funzione f è continua su $[a, +\infty)$;
   c) hanno integrale finito su $[a, +\infty)$ anche le funzioni $g(x)$ ed $h(x)$;
   d) la funzione f può andare all'infinito per $x \to \infty$ di ordine minore di 1
   e) la funzione f è infinitesima di ordine almeno 2.
   Sol.- Molti hanno fatto confusione tra quello che può succedere vicino ad un punto a (che quasi tutti hanno preso per comodità uguale a 0) e quello che succede all'infinito. Quasi tutti hanno detto bene che la c) è falsa. Ma sono false anche tutte le altre: f non ha nessun obbligo di essere limitata né vicino allo 0 ($\sqrt{x}$) né all'infinito: si pensi ad una funzione che non ha limite, discostandosi un po' dallo zero, ma rimanendo sommabile. Se avesse limite, per $x \to +\infty$ questo dovrebbe essere certamente 0 (e quindi f non può andare all'infinito, e quindi la c) é falsa comunque), e l'infinitesimo dovrebbe essere di un ordine k strettamente maggiore di 1, però f potrebbe non avere limite.

7. Data la funzione
   $$f(x) = |x|^3 \cdot x$$
   si dica se è un infinitesimo per $x \to 0$, se è derivabile nel punto $x = 0$, ed eventualmente quanto vale la sua derivata in tale punto.
   Sol.- È un infinitesimo, e il limite di $\frac{f(x)}{x}$ per $x \to 0$ è ovviamente

esistente e vale 0. Non esiste la derivata quarta. Alcuni hanno detto che siccome non esistono tutte le derivate, allora f non è derivabile....