MATEMATICA 1 - Ing. Elettrotecnica e Ing. Energetica
Prova parziale del 7.12.2007 **Tema D** Tempo concesso: 75 minuti
Le risposte devono essere giustificate.
Abbozzo di soluzioni ed errori frequenti riscontrati negli elaborati

1. La somma di funzioni sommabili su un intervallo è sommabile? Il prodotto di due funzioni sommabili su un intervallo è sommabile?
Per entrambe le risposte, dare dimostrazioni o controesempi.
Sol.- L'integrale della somma è la somma degli integrali, quindi se i due addendi sono numeri finiti, tale è la loro somma. Alcuni hanno citato ordini di infinitesimo di addendi e della loro somma, cosa che non c'entra, perché l'ipotesi parla di funzioni sommabili, di qualunque tipo esse siano. Invece il prodotto non è necessariamente sommabile, basti pensare al prodotto di $\frac{1}{\sqrt{x}}$ per se stesso sull'intervallo $(0, 1)$. Questo secondo esempio l'hanno fatto in molti. Alcuni hanno invece preso $1/x$ (che non è sommabile, quindi fuori dall'ipotesi dell'esercizio) sulla semiretta $[1, +\infty[$ e hanno verificato la sommabilità del suo quadrato su quella semiretta, per concludere che sarebbe sommabile anche il prodotto.

2. Sia $f(x)$ una funzione derivabile su $\mathbb{R}$ tale che $\lim_{x\to+\infty} f'(x) = 0$. La f ha un asintoto orizzontale per $x \to +\infty$? Se sì dire perché, se no trovare un controesempio.
Sol.- Ovviamente no, e il controesempio più facile è il logaritmo. Quasi tutti hanno sbagliato confondendo il teorema che dice che SE CÈ il limite della derivata (ipotesi), questo è 0 (tesi), con la situazione dell'esercizio, che, viceversa, aveva come *ipotesi* l'annullarsi del limite della derivata. TUTTI hanno l'idea errata che una funzione che ha asintoto per $x \to \infty$ si avvicini a tale retta senza mai toccarla, mentre può tranquillamente tangerla o intersecarla, basta che la differenza tra la f e l'asintoto tenda a 0 ($\frac{\sin x}{x}$ ha per asintoto l'asse delle x, e lo attraversa ad ogni $k\pi$).

3. Studiare la funzione
$$f(x) = \frac{e^{\frac{1}{x}}}{\sqrt{x+2}}$$
(ins. di def., limiti, immagine, continuità, derivabilità, crescenza, massimi, minimi, asintoti, limiti della derivata, grafico)
Sol.- La funzione è definita per $x > -2$, $x \neq 0$, ha limite $+\infty$ per $x \to -2^+$ e per $x \to 0^+$, ha limite 0 per $x \to 0^-$ e per $x \to +\infty$. Nonostante fosse esplicitamente richiesto, pochissimi hanno detto che l'immagine è $]0, +\infty[$ come pure pochissimi hanno detto che la derivata tende a 0 per $x \to 0^-$. Quasi nessuno ha detto che la derivata tende a $-\infty$ per $x \to -2^-$ e per $x \to 0^-$ credendo che basti che tenda

all'infinito la funzione per garantire che tende all'infinito la derivata. Alcuni hanno sbagliato a derivare, trovando dei punti in cui la (loro) derivata si annullava, alcuni hanno trovato una derivata infinita anche per $x \to 0^-$ (non hanno guardato che l'esponente della e fa cambiare le cose a seconda se tende a $+\infty$ o a $-\infty$). La funzione è decrescente su ciascuno dei due intervalli $(-2, 0)$ e $(0, +\infty)$, ma non su tutto il suo insieme di definizione, come invece hanno scritto alcuni vedendo che la dereivata era sempre negativa.

4. Una funzione dispari ha integrale uguale a 2 nell'intervallo $[a, b]$ con $a,\ b > 0$. Dire se sono veri o falsi i seguenti asserti:
   a) l'integrale sull'intervallo $[-a, -b]$ vale anch'esso 2.
   b) l'integrale sull'intervallo $[-a, -b]$ vale -2.
   c) l'integrale sull'intervallo $[-a, -b]$ vale 0.
   d) non si può dire nulla su quanto eventualmente valga l'integrale sull'intervallo $[-a, -b]$.
   Sol.- Vera la a), se $a < b$ è $-a > -b$ e viceversa, quindi il segno dell'integrale cambia due volte. Altrimenti, detta Φ una primitiva, questa risulta pari, e quindi $\Phi(b) - \Phi(a) = \Phi(-b) = \Phi(-a) = 2$, e quindi è vera la a); le altre contraddicono questa uguaglianza. Molti non hanno dato spiegazioni di sorta, vari invece hanno detto che la a) era falsa e la b) vera.

5. Si dia la definizione di serie e si citino due serie, una convergente e una divergente, spiegando il perché di questa loro proprietà.
   Sol.- Assolutamente NESSUNO ha scritto correttamente la definizione di serie, nonostante fosse stata presentata in classe (due volte) e fosse scritta chiaramente nel file M179sett.pdf. Vari hanno parlato di limite senza specificare di che, alcuni hanno scritto definizioni prive di senso. Vari hanno scritto gli esempi, non sempre bene. Bastava riscrivere gli esempi e la definizione tratti da quel file.

6. Calcolare
   $$\int_3^2 \arctan \frac{1}{x-1}\ dx$$
   (si integra per parti prendendo 1 come fattore differenziale)
   . Sol.- Fatto da molti; alcuni hanno derivato male l'arcotangente.

7. Una funzione continua su $[a, b]$ ha sempre almeno una primitiva? Se sì si dica perché, eventualmente citando un teorema, se no, si dia un controesempio.
   Sol.- Sì, il teor. di Torricelli dice proprio che per ogni funzione f continua $\exists$ almeno una primitiva che è la fuzione integrale. Alcuni hanno chiamato in cuasa il teor. fond. del calcolo integrale (che è

invece una conseguenza), dicendo che se non esistesse la primitiva non ci sarebbe il teorema. Altri hanno anche dimostrato (bene) il teorema.

8. Si scrivano le parti principali degli infinitesimi per $x \to 0$

$$\tan^2 x - \sin x^2, \quad 1 - \cos x - \frac{x^2}{2}$$

Sol.- Hanno sbagliato in molti, perché hanno calcolato (male) il quadrato della tangente, invece che sviluppare i primi due termini $x + \frac{1}{3}x^3$ e quadrare questo binomio, che porta anche il doppio prodotto, cioè $\frac{2}{3}x^4$, che è quello che costituisce la p.p. quando x^2 si è eliminato con $-x^2$ proveniente da $\sin x^2$. Alcuni non hanno capito che per ottenere lo sviluppo di $\sin x^2$ basta scrivere x^2 al posto di x nello sviluppo del seno. Il secondo infinitesimo aveva pure come pp.p. $-\frac{x^4}{4!}$. Molti scrivono che un inifinestimo è uguale alla sua parte principale, o quando scrivono la parte principale lasciano anche quella complementare. Alcuni scrivono che la parte principale è una funzione, o un polinomio, mentre se si sceglie $x - x_0$ come infinitesimo di confronto la parte princ. è il monomio $\ell(x - x_0)^k$ dove è $0 \neq \ell = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{(x-x_0)^k}$.