MATEMATICA I

Corsi di Laurea in Ingegneria Elettrotecnica e in Ingegneria Energetica

Prova parziale del 7.11.2007. Tempo concesso: 75 minuti

N. B.: le risposte vanno giustificate con dimostrazioni o controesempi

Gli abbozzi di soluzioni e i commenti sugli errori più frequenti sono in fondo ad ogni tema. I temi F-G-H non compaiono, perché hanno gli esercizi uguali a quelli dei temi B, C e D rispettivamente.

Tema A

1. Si dia un esempio di una funzione $f(x)$ definita e limitata nell'intervallo $[a, b]$ che non ha limite (sinistro) per $x \to b$.

2. Si studi la funzione $f(x) = x^2 \sin x - 5$ (insieme di definizione, eventuale parità o disparità, eventuale periodicità, limiti per $x \to +\infty$ e per $x \to -\infty$, crescenza, derivata, abbozzo qualitativo del grafico).

3. Una funzione strettamente decrescente in un intervallo e ivi derivabile, ha derivata sempre strettamente negativa. V $\square$ F $\square$

4. Si dica cosa significa $\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty$ e si faccia un grafico di una funzione che goda di questa proprietà (eventualmente se ne scriva anche l'equazione).

5. Sia $f(x)$ un infinitesimo del secondo ordine per $x \to x_0$, sia x_0 un punto interno al sua intervallo di definizione e sia $f(x_0) = 0$. Tale funzione è derivabile in x_0?

6. Si dia la definizione di punto di flesso. Un polinomio di grado dispari ha sempre un punto di flesso? Perché?

7. La funzione f ha limite ℓ finito per $x \to x_0$; è limitata in un intorno destro di x_0? Se sì, dire perché; se no, trovare un controesempio.

8. Il limite della somma è sempre uguale alla somma dei limiti, quando questi esistono e sono finiti entrambi? E viceversa, se esiste il limite per $x \to x_0$ di una somma di due funzioni f_1 ed f_2, esistono i limiti dei singoli addendi per $x \to x_0$?

9. Un polinomio di grado dispari ha almeno una radice reale. Perché?

10. Si enunci la regola di L'Hôpital e quindi si calcoli il limite

$$\lim_{x \to 0} \frac{x - \tan x}{\sin x - x}$$

11. La funzione $f(x) = |\arcsin x|$ ha un valore minimo? Se sì, quanto vale e dove lo assume? e la sua derivata ha un valore minimo? Qual è l'immagine della sua derivata?

****

Tema A - Abbozzo di soluzioni e commenti

1. $\sin \frac{1}{x-b}$ per $x \neq b$, un valore qualsiasi per $x = b$. Molti candidati hanno indicato una funzione simile, ma non l'hanno definita in b, e quindi non era un buon esempio di funzione definita sull'intervallo chiuso.

2. La funzione $x^2 \sin x$ è stata studiata in classe: non ha limite per $x \to \infty$ in quanto ha infinite oscillazioni (è comunque non limitata), è un infinitesimo del terzo ordine per $x \to 0$, è dispari, il suo grafico si appoggia alternativamente a quelli delle funzioni x^2 e $-x^2$. Traslando di -5 sull'asse delle ordinate si ottiene una funzione che non è più dispari e che tende a -5 per $x \to 0$, ma continua a non avere limite (ed essere comunque non limitata) per $x \to \infty$; il suo grafico si appoggia a $x^2 - 5$ e a $-x^2 - 5$. Molti hanno detto che tendeva all'infinito per $x \to \infty$.

3. Falso: vd. $-x^3$. Molti hanno confuso con il teorema che dice il viceversa.

4. Vd. libro. Vari hanno dimenticato di escludere x_0 dall'intorno in cui deve succedere $f(x) > M$; alcuni pretendono di fissare sia M che l'intorno, altri fissano l'intorno e poi compare la disuguaglianza con M che non si sa chi sia.

5. Sì, e la derivata è 0. Infatti è $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{(x-x_0)^2} = L \neq 0$, per cui, essendo $f(x_0) = 0$ si ha $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = 0$.

6. Un polinomio di grado dispari ha per derivata un polinomio di grado pari, che ha certamente massimo o minimo relativo, e quindi in questi punti il polinomio di partenza ha un flesso. Molti hanno creduto di rispondere presentando un esempio (in genere x^3); altri hanno detto che un polinomio di 2^o grado ha per forza un minimo, “dimostrando” ciò con l'esempio x^2.

7. Se una funzione ha limite finito ℓ deve essere $\ell - \epsilon < f(x) < \ell + \epsilon$ in un intero intorno di x_0, e quindi a maggior ragione in un intorno destro che è un suo sottoinsieme. Vari hanno creduto che l'intorno fosse sulle ordinate $]\ell, \ell + \epsilon[$, altri hanno preso l'intorno $[x_0, x_0 + \delta[$, mentre x_0 va escluso comunque.

8. Vari hanno creduto che se c'è il limite della somma ci siano anche i limiti singoli: invece basta prendere due funzioni che non hanno limite, sottrarre l'una dall'altra e si ottiene la funzione sempre nulla che ha limite 0 per x che tende a qualsiasi cosa.

9. È una funzione continua che va all'infinito di segno opposto per $x \to \pm\infty$ ed è definita su tutta la retta, che è un intervallo; quindi si applica il teor. degli zeri. Vari non hanno specificato che un polinomio è una funzione continua, e molti hanno detto che va a $+\infty$ per $x \to +\infty$ mentre il segno dipende dal segno del coefficiente di grado massimo. Alcuni hanno presentato semplicemente x^3 credendo che un esempio bastasse.

10. Non pochi non sanno distinguere l'ipotesi dalla tesi: l'esistenza del $\lim \frac{f(x)}{g(x)}$ è una parte della tesi, mentre l'esistenza di $\lim \frac{f'(x)}{g'(x)}$ è tra le ipotesi; molti hanno dimenticato di dire l'ipotesi che le due funzioni sono entrambe infinitesime, o entrambe infinite. Alcuni hanno esposto un esempio come se fosse l'enunciato del teorema. Il limite risulta 2 (applicando la regola due volte, oppure accorgendosi subito dopo la prima volta che un limite va a 1). Alcuni hanno trovato per errore -2 (perché hanno messo male le parentesi con la prima derivazione del numeratore), e non si sono accorti che un limite negativo è impossibile, dato che in un intorno di 0 il numeratore è negativo (la tangente sta sopra alla bisettrice) e il denominatore pure (il seno sta sotto).

11. $|\arcsin x|$ ha un valore minimo che è 0, assunto in $x = 0$. La derivata è $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ *soltanto* per gli $x \geq 0$, mentre è $-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ per gli $x < 0$. La derivata ha per immagine $]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[$. Alcuni hanno detto che la derivata era l'arcocoseno, altri hanno scritto che la derivata può assumere qualsiasi valore (eppure doveva essere evidente che la tangente non era mai orizzontale, quindi bisognava guardare con più cura...)

Tema B

1. Si dica cosa significa $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$ e si faccia un grafico di una funzione che goda di questa proprietà.

2. Si dia la definizione di derivata di una funzione f in un punto x_0. Una funzione derivabile in un punto è ivi sempre continua?

3. Si dia la definizione di funzione limitata e si dica se la derivata della funzione $f(x) = \arctan x$ è limitata.

4. Siano f e g due funzioni che hanno limite (finito oppure no) per $x \to \infty$. Si citi un caso ni cui il loro prodotto $f \cdot g$ non ha limite.

5. Si faccia un pezzo di grafico di tre funzioni che evidenzi il fatto che sono per $x \to x_0$, rispettivamente, un infinitesimo di ordine 1, un infinitesimo di ordine inferiore a 1, un infinitesimo di ordine superiore a 1.

6. Studiare la funzione $f(x) = \sqrt{\lg(\arctan x)}$ (ins. di def., limiti, crescenza, eventuali massimi e minimi, segno, abbozzo del grafico). La f è limitata?

7. Se f è una funzione definita e limitata su tutto $\mathbb{R}$, e invece g è una funzione definita ma non limitata su tutto $\mathbb{R}$, la funzione $f \circ g$ è limitata su tutto $\mathbb{R}$?. E la funzione $g \circ f$ è limitata su $\mathbb{R}$?

8. Sia g derivabile in $x = 0$; si dica se è vera o falsa ciascuna delle suguenti asserzioni: 1) $|g|$ è derivabile in 0; 2) $|g|$ è continua in 0; 3) $|g|$ non è derivabile in 0; 4) esiste $g''(0)$.

9. Si enunci il teor. di Weierstrass e si trovino degli esempi per i quali, se non è soddisfatta una delle ipotesi, non è soddisfatta neanche la tesi.

10. La funzione $\frac{\arctan 3x}{x} + \frac{1}{x}$ ha limite (finito) per $x \to 0$? Se sì, quanto vale? E ha limite (finito) per $x \to -\infty$? Se sì, quanto vale?

11. Una funzione con derivata strettamente positiva in un intervallo $[a, b]$ ha limite per $x \to a^+$?

****

TEMA B - Abbozzo di soluzioni e commenti (vale anche per il tema F, che aveva gli stessi esercizi in ordine diverso)

1. Alcuni hanno chiamato in causa un x_0 e un suo intorno, pur poi facendo il grafico bene. Altri hanno fissato $M > 0$, ma poi hanno scritto che deve essere $f(x) < M$ invece di $-M$, il che ovviamente non va bene, perché la f risulterebbe semplicemente minore di un numero positivo.

2. Qualcuno ha scritto che una funzione derivabile può non essere continua; vd. invece teor. 50, p. 120.

3. Qualcuno ha scritto che la f è limitata se è limitato il suo insieme di definizione invece che la sua immagine. La derivata di $\arctan x$ è $\frac{1}{1+x^2}$ che è sempre > 0 e ≤ 1 e vale 1 solo in $x = 0$, e quindi è limitata. Qualcuno ha detto che siccome è limitata una funzione, allora per forza lo è la sua derivata, cosa vera per l'arcotangente ma ad esempio non per l'arcoseno. La genesi dell'errore sta nel fatto che viene confusa l'immagine con l'insieme di definizione: quello sì, se è limitato per la f lo è anche per la f' (la f' come funzione autonoma potrebbe avere

un i.d.d. più grande, ma non sarebbe la derivata della f dove la f non esiste). Qualcuno ha sbagliato la derivata, scrivendo al denominatore $1-x^2$.

4. Ad esempio x e $\frac{\sin x}{x}$ per $x \to \infty$. Ovviamente se si prendono due funzioni che hanno entrambe limite finito, il prodotto ha limite e quindi non può essere un buon esempio. Alcuni hanno preso due funzioni delle quali però una già non aveva limite, e quindi l'esempio non era quello richiesto.

5. Lo hanno fatto bene quasi tutti, spesso però identificando x_0 con lo 0.

6. La funzione è stata proposta nell'esercitazione in classe, le cui soluzioni sono nel file M17siI.pdf (c'era un errore, ora corretto, sull'insieme di definizione, che è $x \geq \tan 1$). Alcuni hanno detto che la f non è limitata, confondendo la non limitatezza dell'insieme di definizione con l'immagine, che è compresa tra 0 (compreso) e $\sqrt{\lg(\pi/2)}$ (escluso).

7. Risolto in classe. Ovviamente se l'immagine di f è limitata, lo è l'immagine di $f \circ g$; di $g \circ f$ nulla si può dire a priori, dipende da come sono le funzioni (qualcuno ha detto che è di sicuro non limitata, il che non è vero, vd. l'esercizio precedente)

8. Risolto in classe. Però vari non hanno l'idea che se una funzione è continua lo è anche il suo modulo.

9. Quasi tutti hanno detto giusto il teorema; alcuni come esempio in cui non è verificata la tesi hanno scelto $\sin x$ definito su tutta la retta, che invece ha sia massimo che minimo (sarebbe un esempio di funzione per la quale è verificata la tesi anche se non lo è una delle ipotesi).

10. Per $x \to 0$ il limite è infinito perché un addendo tende a 3 e l'altro a$+\infty$; per $x \to -\infty$ entrambi tendono a 0.

11. Essendo la derivata strettamente positiva sull'intervallo chiuso (e con questo si intende che c'è la derivata destra in a e quella sinistra in b), la funzione è crescente, e quindi ha sempre limite (teor. 35, p. 92). Alcuni hanno citato l'esempio di x^3, che è crescente pur avendo derivata nulla in un punto, ma non rispondeva alla questione.

Tema C

1. Si dica cosa significa $\lim_{x\to -1^-} = -\infty$ e si scriva una funzione che gode di questa proprietà.

2. Si dia la definizione di derivabilità di una funzione nel punto x_0 e si dimostri che la funzione $f(x) = \sqrt{|x-1|}$ non ha derivata (finita) destra in $x = 1$.

3. Si studi la funzione $f(x) = \frac{e^{2\cos x}}{\cos x}$ (ins. di def., crescenza, decrescenza, limiti, eventuali massimi e minimi relativi e/o assoluti, eventuale parità o periodicità, esistenza di flessi, abbozzo del grafico).

4. Come si comportano le rette tangenti nel punto $(x_0, f(x_0))$ ai grafici di funzioni che sono infinitesime rispettivamente di ordine $k = 1/2,\ k = 1,\ k = 10$ per $x \to x_0$? Fare un grafico illustrativo.

5. Si enunci la regola di L'Hôpital nel caso $\frac{\infty}{\infty}$.

6. Si enunci il teor. di Weierstrass e si faccia un esempio di funzione continua su un intervallo limitato che non ha né max né min.

7. Si scriva l'equazione della retta tangente nel punto di ascissa 3 al grafico della funzione $f(x) = \sqrt{x^2 - 2} - \lg(x - 1)$.

8. Nei punti di massimo e minimo della derivata prima ci sono punti di flesso per la funzione. Si verifichi questo fatto per la funzione $\arccos x$.

9. Quale infinitesimo di confronto si sceglie per valutare l'ordine di un infinitesimo per $x \to 3$? Se f è un infinitesimo per $x \to 3$, la funzione $f(x) \cdot e^{\sin(x-3)}$ è del pari un infinitesimo? E $f(x) \cdot e^{-\frac{1}{\sin|x-3|}}$?

10. Si consideri la funzione $f(x) = e^{2x}$ sull'intervallo $[0, 1]$, e si trovino i punti la cui esistenza è assicurata dal teor. di Lagrange. Si poteva indovinare subito che ce n'è uno solo?

11. Perché non esistono punti in cui la derivata di $\arctan x$ vale 2?

****

TEMA C - Abbozzo di soluzioni e commenti (vale anche per il Tema G, che aveva gli stessi esercizi in ordine diverso)

1. Quasi tutti lo hanno fatto giusto; sono comparsi i soliti errori segnalati negli altri temi.

2. Qualcuno ha dato la definizione di continuità, e qualcuno ha scritto il rapporto incrementale senza il llimite; qualcuno ha solo proposto l'interpretazione geometrica supponendo che fosse noto il concetto di tangente (mentre abbiamo definito la tangente al grafico di una funzione come quella retta il cui coefficiente angolare è la derivata nel punto). Vari hanno detto che la derivata era infinita, senza trovarla (probabilmente avevano in mente il modello visto tante volte).

3. Fatto da molto pochi in maniera completa, ancorché fosse stato iniziato in classe e proposto per casa. La funzione è periodica di periodo 2π,

la si guarda quindi solo nell'intervallo $-\pi, \pi$ (tra l'altro è anche pari per cui si potrebbe guardare anche solo nell'intervallo $[0, \pi]$). Nei punti $\pi/2 + K\pi$ va all'infinito (a $+\infty$ per $x \to \pi/2$ da sinistra e per $x \to -\pi/2$ da destra; a $-\infty$ per $x \to -\pi/2$ da sinistra e per $x \to \pi/2$ da destra). È

$$f'(x) = \frac{e^{2\cos x} 2(-\sin x)\cos x - e^{2\cos x}(-\sin x)}{\cos^2 x}$$

che si annulla per $\sin x = 0$ e per $2\cos x = 1$, cioè per $x = K\pi$ e per x $=\pm\pi/3 + 2K\pi$. Dove si annulla il seno sono massimi relativi e dove il coseno vale $1/2$ sono minimi relativi. In $x = 0$, e quindi per gli $x = K\pi$ con K pari (dove il coseno vale 1) ci sono massimi relativi che valgono e^2; per gli $x = K\pi$ con K dispari (dove il coseno vale -1) ci sono massimi relativi che valgono $-e^{-2}$.

4. Le rette tangenti sono rispettivamente verticale, obliqua, orizzontale. Vari hanno detto che quella obliqua ha coefficiente angolare 1, il che è vero solo in un caso particolare, come pure hanno fatto il disegno ponendo $x_0 = 0$.

5. Soliti errori segnalati in altri temi: l'esistenza del limite del rapporto tra le derivate è un'ipotesi, l'esistenza del limite del rapporto tra le funzioni è una tesi.

6. Basta un esempio su un intervallo aperto; alcuni hanno invece fatto un esempio su un intervallo illimitato, che non era quanto richiesto.

7. La retta ha equazione $y - f(3) = f'(3)(x-3)$; $f(3) = \sqrt{7} - \log 2$;

$$f'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2-2}} - \frac{1}{x-1}$$

e quindi $f'(3) = 3/\sqrt{7} - 1/2$.

8. C'è da verificare che $\arcsin x$ ha flessi verificando dove la sua derivata ha un massimo o un minimo. La derivata, negativa, ha chiaramente soltanto un massimo per $x = 0$ dove il radicando al denominatore vale 1 (altrove la funzione ha valori più negativi) e quindi in $x = 0$ c'è un flesso. Vari hanno confuso il massimo della derivata con quello della funzione; altri hanno sbagliato il segno della derivata, confondendo il massim con il minimo (ma il punto risultava lo steso...)

9. L'infinitesimo di confronto è $x-3$, sono tutti infinitesimi perché $e^{\sin(x-3)}$ tende a 1 e quindi è limitata, l'altra esponenziale è un infinitesimo.

10. Il punto è

$$x = \frac{1}{2}\lg\left(\frac{e^2-1}{2}\right)$$

Quasi tutti hanno saputo scrivere la tesi del teor. di Lagrange $\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c)$; molti meno hanno saputo trovare c; quasi nessuno ha saputo dire che si poteva indovinare che il punto era unico perché la *derivata* della funzione era crescente, e quindi non poteva assumere quel valore in due punti c diversi. Molti invece hanno detto che ciò si poteva dedurre dal fatto che la *funzione* era crescente, cosa non vera: ad esempio x^3 è crescente nell'intervallo $[-1, 1]$ ma i punti in questione sono due (e così succede in tutte le funzioni dispari su intervalli simmetrici rispetto all'origine: i punti sono in numero pari e simmetrici).

11. Essendo $D(\arctan x) = \frac{1}{1+x^2}$ tale derivata è sempre ≤ 1 e quindi < 2; qualcuno ha guardato il grafico, desumendo che la derivata massima si aveva nel punto in cui la tangente aveva inclinazione massima, e questo avveniva per $x = 0$ dove il coefficiente angolare era 1.Altri hanno scomodato la derivata seconda per scoprire il massimo della derivata, che si vedeva subito.

Tema D

1. Si dica cosa significa $\lim_{x\to 2^+} = \infty$ e si scriva una funzione che gode di questa proprietà.

2. Si dia la definizione di derivata di una funzione nel punto x_0; la funzione $\lg(\arccos x)$ ha derivata limitata nell'insieme in cui esiste?

3. Si studi la funzione $f(x) = \frac{e^x}{\cos x}$ (ins. di def., crescenza, decrescenza, limiti, eventuali massimi e minimi relativi e/o assoluti, immagine, eventuale parità o periodicità, esistenza di flessi, abbozzo del grafico).

4. Si $f(x)$, definita e continua in $[-2, 5]$, un infinitesimo di ordine $2/3$ per $x \to 3$. Si abbozzi un grafico di una funzione che gode di questa proprietà. Che inclinazione ha la sua tangente nel punto $(3, f(3))$?

5. Si enunci la regola di L'Hôpital nel caso $\frac{0}{0}$.

6. Può esistere una funzione definita e continua su $[-1, 1]$ che vale 2 in $x = -1$ e in $x = 1$ e non abbia nessun punto in cui la derivata è nulla? Sì ☐ No ☐

7. Si scriva l'equazione della retta tangente nel punto di ascissa 5 al grafico della funzione $f(x) = \sqrt{x^2 - 2} - \lg(x - 1)$.

8. Nei punti di massimo e minimo della derivata prima ci sono punti di flesso per la funzione. Si verifichi questo fatto per la funzione $\arctan x$.

9. Quale infinitesimo di confronto si sceglie per valutare l'ordine di un infinitesimo per $x \to 3$? Se f è un infinitesimo per $x \to 3$, la funzione $f(x) \cdot e^{\sin(x-3)}$ è del pari un infinitesimo? E $f(x) \cdot e^{-\frac{1}{\sin|x-3|}}$?

10. Si consideri la funzione $f(x) = e^{-2x}$ sull'intervallo $[0, 1]$, e si trovino i punti la cui esistenza è assicurata dal teor. di Lagrange. Si poteva indovinare subito che ce n'è uno solo?

11. Esistono punti in cui la derivata di $\arccos x$ vale -2?

****

TEMA D - Abbozzo di soluzioni e commenti (vale anche per il Tema H, che aveva gli stessi esercizi in ordine diverso)

1. Molti hanno scritto bene la definizione, ma alcuni hanno scritto che $|f(x)| > M$ significa $f(x) > M$ *e* $f(x) < -M$, cosa evidentemente impossibile; andava scritto *o*. Alcuni, in accordo con l'errore di sopra, hanno fatto grafici (errati) di funzioni che sullo stesso intorno avevano due valori. Vari hanno realizzato che qualsiasi funzione che tende a $+\infty$ o a $-\infty$ è un caso particolare di funzione che tende a ∞ (senza segno), e hanno presentato quindi qualcuna di queste, utilizzando esempi ben noti. Qualcuno si è tuttavia diligentemente sforzato di disegnare una funzione che tendesse ad ∞ *senza tendere* né a $+\infty$ né a $-\infty$, e ha disegnato un grafico di funzione (ovviamente non continua) fatto da trattini che si appoggiavano alternativamente su $1/x$ e su $-1/x$: tale funzione soddisfa quanto richiesto.

2. La derivata richiesta è $f'(x) = \frac{1}{\arccos x} \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$ che va all'infinito per $x \to \pm 1$. Alcuni hanno scritto che essendo limitato l'arcoseno lo è anche il logaritmo e anche la sua derivata.

3. Quasi nessuno ha affrontato questo esercizio, nonostante fosse estremamente simile a modelli già studiati. L'i.d.d è $x \neq \pi/2 + K\pi$; il grafico dela funzione si appoggia alternativamente a quello di e^x quando $\cos x = 1$ e a quello di $-e^x$ quando $\cos x = -1$, cioè per $x = 2K\pi$ e $\pi + 2K\pi$ rispettivamente. Ci si appoggia da sopra e da sotto rispettivamente, dato che il coseno a denominatore è sempre < 1; il grafico è quindi al di fuori della zona di piano compresa tra i due grafici sui quali si appoggia. La funzione non è mai nulla, e va all'infinito quando $x \to \pi/2 + K\pi$ (a $+\infty$ quando il coseno va a 0 con valori positivi, a $-\infty$ quando va a 0 eon valori negativi). La derivata è:
$$f'(x) = \frac{e^x \cos x - e^x(-\sin x)}{\cos^2 x}$$
che si annulla per $\cos x + \sin x = 0$, cioè per $\tan x = -1$, cioè per $x = -\pi/4 + K\pi$. Questi sono alternativamente punti di massimo e di minimo. Per $x \to +\infty$ la funzione tende all'infinito (senza segno), stando sempre al di fuori delle due sponenziali. Per $x \to -\infty$ invece non c'è limite. È $f(0) = 1$.

4. La tangente è verticale. Alcuni hanno scritto "quasi verticale", altri molto inclinata.

5. Soliti errori segnalati negli altri temi.

6. Il teor. di Rolle ha tra le ipotesi la derivabilità della funzione, che qui non è data; quindi non c'è garanzia che esista un punto in cui la derivata si annulli. Esempio: $|2x|$.

7. $y - (\sqrt{23} - 2\lg 2) = (\frac{5}{\sqrt{23}} - \frac{1}{4})(x - 5)$

8. Già risolto in altro tema.

9. Già risolto in altro tema.

10. Risolto uno assolutamente analogo in altro tema. Anche qui vari hanno creduto che il fatto che di punti ce ne fosse uno solo si potesse indovinare dalla decrescenza della funzione, mentre il fatto dipende dalla decrescenza della derivata.

11. La derivata dell'arcocoseno è $\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$ che assume valori da ∞ al suo massimo -1. Ci sar̀a quindi almeno un punto in cui essa vale -2. Uguagliando la derivata a -2 si ottengono due punti: $x = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$.