MATEMATICA 1 - Ing. Elettrotecnica e Ing. Energetica
Esercitazione del 26.11.2007

Svolgere a scelta **otto esercizi presi da otto gruppi diversi**. **Le risposte devono essere giustificate**

1. Calcolare
$$\int_2^3 \arctan \frac{1}{x-1}\, dx$$
(si integra per parti prendendo 1 come fattore differenziale).

2. Dire se esiste finito l'integrale
$$\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\, dx$$
e in caso affermativo calcolarlo.

3. Si dica se la funzione
$$f(x) = \frac{x+e^{-x}}{x^2 - \lg x}$$
è sommabile da 0 a 2 e da 2 a $+\infty$, giustificando le risposte.
Attenzione: *non si chiede* di calcolare l'integrale.

****

4. Studiare la funzione
$$f(x) = \arctan \frac{x-1}{x+1}$$
(ins. di def., limiti, continuità, derivabilità, crescenza, massimi, minimi, asintoti, grafico)

5. Studiare la funzione
$$f(x) = \cos 2x - x$$

6. Studiare la funzione
$$f(x) = \arcsin \sqrt{2x - x^2}$$

****

7. Enunciare e dimostrare il teor. della media integrale.

8. Enunciare e dimostrare il teorema di Torricelli.

9. Una funzione derivabile su un intervallo limitato $[a, b]$ ha sempre anche integrale finito su tale intervallo? Se sì dire perché, se no trovare un controesempio.

10. Una funzione pari ha integrale uguale a 2 nell'intervallo $[a, b]$ con $a,\ b >$ 0. Dire se sono veri o falsi i seguenti asserti:
a) l'integrale sull'intervallo $[-a, -b]$ vale anch'esso 2.
b) l'integrale sull'intervallo $[-a, -b]$ vale -2.
c) l'integrale sull'intervallo $[-a, -b]$ vale 0.
d) non si può dire nulla su quanto eventualmente valga l'integrale sull'intervallo $[-a, -b]$.
****

11. Se due funzioni f e g tendono entrambe a 2 per $x \to 4$ cosa si può dire del seguente rapporto? È applicabile la regola di L'Hôpital?

$$\lim_{x \to 4} \frac{f(x)}{g(x)}\ ?$$

12. Due infinitesimi f e g sono entrambi di ordine 2 per $x \to 1$.
La funzione $f + g$ è ancora un infinitesimo? Se sì, cosa si può dire sull'ordine?

13. Si scriva la formula di MacLaurin per le funzioni $\sin x,\ \cos x,\ \tan x,\ e^x$.
****

14. Si dica se la funzione

$$f(x) = |x| \cdot x$$

è derivabile nel punto $x = 0$, se è un infinitesimo per $x \to 0$ e si dica quanto vale il suo integrale tra -1 e 1..

15. Data una funzione $f(x) = g(x) + h(x)$ che ha integrale finito in un intervallo $[a, b]$, dire se sono veri o falsi (con dimostrazioni e controesempi) i seguenti asserti
a) la funzione è limitata su $[a,\ b]$;
b) hanno integrale finito su $[a, b]$ anche le funzioni $g(x)$ ed $f(x)$;
c) la funzione è derivabile su $[a,\ b]$;
d) la funzione può andare all'infinito per $x \to a$ di ordine minore di 1.

16. a) Trovare tutte le primitive di

$$\sqrt{x} + x \lg x + \sin x;$$

quindi tra queste trovare quella che nel punto 1 vale 1.
b) Tra le primitive di $\lg x + \arctan x$ trovare quella che nel punto 1 vale 0.
c) Si calcoli l'area della regione compresa tra le curve di equazione $f(x) = -x^2 - 2x + 1$ e $g(x) = -\frac{2}{x}$. (Suggerimento: si cerchino i punti in cui i due grafici si incontrano...)
d) Si calcoli $\int_0^4 \sin\sqrt{x}\ dx$.

17. a) Studiare la funzione

$$f(x) = \frac{1 - e^x}{e^{2x} + 1}$$

b) Della funzione calcolata in a) trovare la primitiva che vale 0 nel punto 0.
c) Dire se l'integrale $\int_0^t \frac{1-e^x}{e^{2x}+1}\, dx$ ha limite finito per $t \to \infty$.
d) Calcolare

$$\int_0^k x e^{-\frac{x^2}{2}}\, dx$$

e quindi dire se esiste finito il limite per $k \to +\infty$, e, in caso affermativo, quanto vale.

18. a) L'area compresa tra il semiasse delle x per $x > 1$ e il grafico della funzione

$$f(x) = \frac{x + e^{-x}}{x^2}$$

è finita? (Sugg.: si guardi di che ordine sono gli infiniti al numeratore e denominatore...)
b) Si studi, al variare del parametro reale a, la funzione $f(x) = |x|^a \lg |x|$ esplorandone anche la prolungabilità e l'eventuale derivabilità nello 0 e l'eventuale sommabilità su tutta la retta.

19. a) La funzione

$$f(x) = x^2 \cos \frac{1}{x^2}$$

non è definita per $x = 0$. È prolungabile per continuità in quel punto? In che modo?
La sua funzione integrale $\int_0^x f(u)\, du$ esiste? è derivabile? (*non si chiede di trovarla!*)
b) Si scriva la formula di MacLaurin della funzione $f(x) = \lg(1 + x)$ arrestata al termine che contiene la derivata terza.
c) Si scriva la formula di MacLaurin della funzione $f(x) = \tan x$ arrestata al termine che contiene la derivata terza.
d) Quale è il polinomio di quinto grado che meglio approssima la funzione $x - \sin x$ in un intorno dello 0?

20. a) Studiare la funzione

$$f(x) = \arctan \frac{1}{1 - x^2}$$

(insieme di definizione, segno, continuità, derivabilità, attacchi, crescenza, decrescenza, massimi, minimi, eventuali asintoti verticali, obliqui o orizzontali). Giustificare le risposte.

b) Studiare la funzione $f(x) = x \lg^2 x$ (continuità, eventuale prolungamento per continuità, attacchi, grafico). Calcolarne poi l'integrale tra 1 e 2. Esiste finito il suo integrale tra 0 e 1? Perché?
c) Studiare la funzione $f(x) = x \arctan x$ (trovarne minimi e massimi, l'asintoto, se c'è, studiare il tipo di infinitesimo in un intorno di 0, grafico)
d) Studiare la funzione $f(x) = \frac{e^{-x^2}}{1+x^2}$.

21. a) Calcolare

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos 2x}{e^{3x}-1-3x}$$

b) Quanto vale $\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}$?
c) Si scriva lo sviluppo di MacLaurin della funzione che si trova al denominatore del caso a).
d) Si dia la definizione di *parte principale* e *parte complementare* di un infinitesimo. Si scrivano quindi le parti principali degli infinitesimi per $x \to 0$

$$x - \sin x \cos x, \quad \tan x - \sin x^2, \quad 1 - \cos x - \frac{x^2}{2} + \sin x - x$$

.