MATEMATICA 1 - Ing. Elettrotecnica e Ing. Energetica
Esercitazione del 26.11.2007

Svolgere a scelta **otto esercizi presi da otto numeri diversi**. **Le risposte devono essere giustificate**

Abbozzo di soluzioni

1. Calcolare
$$\int_2^3 \arctan\frac{1}{x-1}\ dx$$
(si integra per parti prendendo 1 come fattore differenziale).
Sol. - La derivata del fattore finito è
$$\frac{1}{1+\frac{1}{(x-1)^2}}\cdot\frac{-1}{(x-1)^2}$$
che, semplificata si riduce a $\frac{-1}{x^2-2x+2}$, e quindi il risultato dell'integrazione per parti è
$$\Big[x\arctan\frac{1}{x-1}\Big]_2^3+\int_1^3\frac{x\ dx}{x^2-2x+2}$$
Occupiamoci ora delle primitive dell'integranda: dividiamo e moltiplichiamo per 2 ed otteniamo
$$\frac{1}{2}\frac{2x}{x^2-2x+2}$$
lasciando da parte 1/2, aggiungendo e togliendo 2 al numeratore otteniamo
$$\frac{2x}{x^2-2x+2}=\frac{2x-2}{x^2-2x+2}+\frac{2}{x^2-2x+2};$$
le primitive della prima frazione sono $\lg(x^2-2x+2)+c$; il denominatore della seconda frazione si può scrivere $(x-1)^2+1$ e quindi le primitive della seconda frazione sono $2\arctan(x-1)+c$. Pertanto l'integrale definito risulta
$$\Big[x\arctan\frac{1}{x-1}\Big]_2^3+\frac{1}{2}\Big[\lg(x^2-2x+2)+2\arctan(x-1)\Big]_2^3.$$
Sostituendo i valori 3 e 2 e sottraendo si ha:
$$3\arctan\frac{1}{2}-2\arctan 1+\frac{1}{2}(\lg 5-\lg 2+2\arctan 2-2\arctan 1)=$$
$$=3\arctan\frac{1}{2}-2\arctan 1+\frac{1}{2}(\lg\frac{5}{2}+2\arctan 2-2\arctan 1)=$$
$$=3\arctan\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\lg\frac{5}{2}+\arctan 2-\frac{3\pi}{4}.$$

2. Dire se esiste finito l'integrale
$$\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$$
e in caso affermativo calcolarlo.
Sol.- Esiste finito, perché la funzione è definita solo per $|x| \leq 1$; in 0 la f è continua, pertanto va all'infinito solo per $x \to 1$. Essendo $\sqrt{1-x^2} = \sqrt{(x-1)(x+1)}$, solo il primo fattore sotto la radice va a 0, e quindi la funzione va all'infinito come ci va $\frac{1}{\sqrt{x}}$ in un intorno destro di 0, e quindi risulta sommabile.
Una primitiva dell'integranda è $g(x) = -\frac{1}{2}\sqrt{1-x^2}$; calcolandola tra 0 e $1-1/k$ e poi facendo il limite per $k \to +\infty$ si ottiene $\frac{1}{2}$.

3. Si dica se la funzione
$$f(x) = \frac{x+e^{-x}}{x^2 - \lg x}$$
è sommabile da 0 a 2 e da 2 a $+\infty$, giustificando le risposte.
Attenzione: *non si chiede* di calcolare l'integrale.
Sol. - La funzione è sommabile nell'intervallo $[0,2]$ perché per $x \to 0$ il numeratore tende a 1 e il denominatore tende a $+\infty$, e quindi l'intera funzione tende a 0, è quindi prolungabile per continuità e pertanto l'integrale è finito. Non così invece nella semiretta $[2,+\infty)$ dove la funzione tende a 0 per $x \to +\infty$, ma come $\frac{1}{x}$, e quindi non è sommabile.

4. Studiare la funzione
$$f(x) = \arctan\frac{x-1}{x+1}$$
(ins. di def., limiti, continuità, derivabilità, crescenza, massimi, minimi, asintoti, grafico)
Sol. - In $x = -1$ la funzione non è definita, ed ha limiti $\pm\frac{\pi}{2}$ da destra e da sinistra rispettivamente. È $\lim_{x\to\pm\infty} = \frac{\pi}{4}$ e $f(1) = 0$. La derivata è
$$\frac{1}{1+\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^2} \cdot \frac{2}{(x+1)^2};$$
la funzione è crescente su ciascuna delle due semirette $(-\infty,-1)$ e $(-1,+\infty)$ singolarmente prese, ma *non* sull'insieme delle due semirette.

5. Studiare la funzione
$$f(x) = \cos 2x - x$$
Sol. - Definita su tutto $\mathbb{R}$, il grafico è compreso tra le rette $y = -x+1$ e $y = -x-1$, ha alternativamente punti di max e min dove $\sin 2x = -1/2$, cioè dove $x = -\frac{\pi}{12} + 2K\pi$ e $x = -\frac{11\pi}{12} + 2K\pi$.

6. Studiare la funzione

$$f(x) = \arcsin\sqrt{2x - x^2}$$

Sol. - I.d.d.: il radicando deve essere positivo, e inoltre la radice deve essere compresa tra -1 e +1 (e quindi, dato che è sempre positiva, tra 0 e 1). Di qui risulta; $0 \le x \le 2$; inoltre è $f(0) = f(2) = 0$;

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{\sqrt{1-(2x-x^2)}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{2x-x^2}}(2-2x) = \\ &= \frac{2-2x}{\sqrt{1-2x+x^2}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{2x-x^2}} = \\ &= \frac{1-x}{|1-x|} \cdot \frac{1}{\sqrt{2x-x^2}}, \qquad x \ne 0, 1, 2; \end{aligned}$$

la derivata è quindi positiva in $(0,1)$, ed è negativa in $(1,2)$. In $x = 1$ c'è un punto angoloso (la derivata sinistra vale +1 e quella destra vale -1; la derivata va a $+\infty$ per $x \to 0^+$ e va a $-\infty$ per $x \to 2^-$. Il massimo è in $x = 1$ e vale $\frac{\pi}{2}$; l'immagine è $[0, \frac{\pi}{2}]$.

7. Enunciare e dimostrare il teor. della media integrale.
Sol. - Vd. testo.

8. Enunciare e dimostrare il teorema di Torricelli.
Sol. - Vd. testo.

9. Una funzione derivabile su un intervallo limitato $[a, b]$ ha sempre anche integrale finito su tale intervallo? Se sì dire perché, se no trovare un controesempio.
Sol.- Ovviamente sì, in quanto, essendo derivabile, è continua.

10. Una funzione pari ha integrale uguale a 2 nell'intervallo $[a, b]$ con $a,\ b > 0$. Dire se sono veri o falsi i seguenti asserti:
a) l'integrale sull'intervallo $[-a, -b]$ vale anch'esso 2.
b) l'integrale sull'intervallo $[-a, -b]$ vale -2.
c) l'integrale sull'intervallo $[-a, -b]$ vale 0.
d) non si può dire nulla su quanto eventualmente valga l'integrale sull'intervallo $[-a, -b]$.
Sol. - Sull'intervallo $[-a, -b]$ l'integrale vale -2 a) è falsa, l'integrale vale -2 perché se era $a < b$, è $-a > -b$, e quindi l'integrale cambia segno; se era $a > b$, è $-a < -b$, e quindi l'integrale cambia ugualmente segno. È quindi vera la b) e tutte le altre sono false.

11. Se due funzioni f e g tendono entrambe a 2 per $x \to 4$ cosa si può dire del seguente rapporto? È applicabile la regola di L'Hôpital?

$$\lim_{x\to 4} \frac{f(x)}{g(x)}\ ?$$

Sol. - Il rapporto tende al quoziente dei limiti, che è ovviamente 1. La regola di L'Hôpital è applicabile solo ai casi di indeterminazione $\frac{0}{0}$ e $\frac{\infty}{\infty}$ e quindi *non* in questo caso.

12. Due infinitesimi f e g sono entrambi di ordine 2 per $x \to 1$.
La funzione $f + g$ è ancora un infinitesimo? Se sì, cosa si può dire sull'ordine?
Sol. - La somma di due infinitesimi è ancora un infinitesimo, ma l'ordine può essere più grande ($x - \sin x$ è del 3o ordine per $x \to 0$, pur essendo la somma di due infinitesimi del primo).

13. Si scriva la formula di MacLaurin per le funzioni $\sin x,\ \cos x,\ \tan x,\ e^x$.
Sol. - Vd. testo

14. Si dica se la funzione
$$f(x) = |x| \cdot x$$
è derivabile nel punto $x = 0$, se è un infinitesimo per $x \to 0$ e si dica quanto vale il suo integrale tra -1 e 1.
Sol.- È derivabile (esiste il limite del rapporto incrementale e risulta 0), è un infinitesimo per $x \to 0$, ha integrale finito perché è continua (e tale integrale risulta nullo, perché la funzione è dispari).

15. Data una funzione $f(x) = g(x) + h(x)$ che ha integrale finito in un intervallo $[a, b]$, dire se sono veri o falsi (con dimostrazioni o controesempi) i seguenti asserti
a) la funzione è limitata su $[a, b]$;
b) hanno integrale finito su $[a, b]$ anche le funzioni $g(x)$ ed $f(x)$;
c) la funzione è derivabile su $[a, b]$;
d) la funzione può andare all'infinito per $x \to a$ di ordine minore di 1.
Sol. - La a) è falsa: esistono funzioni che hanno integrale finito pur senza essere limitate, ad es. $\frac{1}{\sqrt{x}}$ sull'intervallo $[0, 1]$ (tale funzione si puó porre uguale ad un numero qualsiasi nel punto 0, in modo da ottenere una funzione definita sull'intervallo chiuso). La b) è stata stampata con un refuso: dove è scritto $f(x)$ doveva essere scritto $h(x)$. Detto questo, la b) è falsa, basta prendere una g che non abbia integrale finito, e prendere $h = -g$: la somma è la funzione nulla, che ovviamente ha integrale nullo. La c) è falsa, la derivabilità non c'entra: se una funzione è continua senza essere derivabile, l'integrale esiste finito comunque; la d) è vera, ad es. $\frac{1}{\sqrt{x}}$ sull'intervallo $[0, 1]$.

16. a) Trovare tutte le primitive di
$$\sqrt{x} + x \lg x + \sin x;$$
quindi tra queste trovare quella che nel punto 1 vale 1.
Sol. - Le primitive sono date da $\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + \frac{x^2}{2}\lg x - \frac{x^2}{4} - \cos x + c$; imponendo che valga 1 in $x = 1$ la primitiva risulta quella con $c = \frac{5}{12} + \cos 1$.

b) Tra le primitive di $\lg x + \arctan x$ trovare quella che nel punto 1 vale 0.
Sol. - Le primitive sono $f(x) = x \lg x - x + x \arctan x - \frac{1}{2} \lg(1+x^2) + c$, e la condizione dà $c = 1 - \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \lg 2$.

c) Si calcoli l'area della regione compresa tra le curve di equazione $f(x) = -x^2 - 2x + 1$ e $g(x) = -\frac{2}{x}$. (Suggerimento: si cerchino i punti in cui i due grafici si incontrano...)
Sol. - Il grafico di f è una parabola concava con vertice per $x = -1$ dove vale 2, quello di g è un'iperbole equilatera. Le curve si incontrano in tre punti, di ascissa -2, -1 e 1. Però soltanto le prime due intersezioni racchiudono una regione. L'area cercata risulta dalla differenza delle aree sottese dai due grafici ed è quindi espressa da

$$\int_{-2}^{-1} \left(-x^2 - 2x + 1 + \frac{2}{x}\right) \, dx = \frac{5}{3} - 2 \lg 2$$

(si ricordi a questo proposito che una primitiva di $\frac{1}{x}$ è $\lg |x|$.

d) Si calcoli $\int_0^4 \sin \sqrt{x} \, dx$.
Sol. - Posto $\sqrt{x} = t$ si ha $x = t^2$, $dx = 2tdt$; poiché $0 \le x \le 4$ è $0 \le t \le 2$ e quindi dobbiamo calcolare l'integrale $\int_0^2 \sin t \; 2t \; dt$, che si integra per parti una volta:
$-[2t \cos t]_0^2 + 2 \int_0^2 \cos t \; dt = -4 \cos 2 + [2 \sin t]_0^2 = -4 \cos 2 + 2 \sin 2$. Si nota dalla figura che l'integrale deve essere positivo, e infatti il coseno di 2 radianti 'e negativo.

17. a) Studiare la funzione

$$f(x) = \frac{1 - e^x}{e^{2x} + 1}$$

Sol. - Sempre definita, ha valori positivi per $x < 0$, negativi per $x > 0$, si annulla in $x = 0$, per $x \to +\infty$ tende a 0 con valori negativi (con la regola di L'Hospital non si conclude niente, bisogna guardare gli ordini di infinito: quello del denominatore è più grande di quello del numeratore, infatti $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim -\frac{e^x}{e^{2x}} = 0$), per $x \to -\infty$ tende a 1 con valori minori di 1 (il numeratore è < 1, il denominatore è > 1). Vale 0 in $x = 0$. È

$$f'(x) = \frac{e^x (e^{2x} - 2e^x - 1)}{(e^{2x} + 1)^2}$$

In $x = 0$ la derivata vale -1 e quindi la tangente al grafico è la retta $y = -x$. Per cercare gli zeri della derivata si pone $e^x = t$ e ci si trova a dover vedere quando si annulla il trinomio $t^2 - 2t - 1$ (gli altri fattori non si annullano). Il trinomio si annulla per $t = 1 \pm \sqrt{2}$, ma, data la posizione, soltanto il valore $t = 1 + \sqrt{2}$ è ammissibile e fornisce $x = \lg(1+\sqrt{2})$ che, come c'era da aspettarsi, è > 0. Sul semiasse delle $x > 0$ la derivata passa da -1 in $x = 0$ a 0 nel punto di minimo per poi tornare ad avere limite 0 per $x \to +\infty$: ci sarà quindi un flesso dopo $x = \lg(1+\sqrt{2})$. Per gli x negativi la derivata non si annulla mai, tende a 0 per $x \to -\infty$, e vale -1 in $x = 0$. Non necessariamente ci sono dei flessi (e infatti non ci sono).

b) Della funzione calcolata in a) trovare la primitiva che vale 0 nel punto 0.
Sol. - Le primitive si ottengono ponendo $e^x = t$, da cui $x = \lg t$, $dx = \frac{1}{t}\,dt$. Si ha perciò $\int \frac{1-e^x}{e^{2x}+1}\,dx = \int \frac{1-t}{t^2+1}\frac{1}{t}\,dt = \arctan t - \frac{1}{2}\lg(t^2+1) + c$ da cui, tornando alla posizione, $\arctan e^x - \frac{1}{2}\lg(e^{2x}+1) + c$. La condizione fornisce $\arctan 1 - \frac{1}{2}\lg 2 + c = 0$ da cui $c = -\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\lg 2$.

c) Dire se l'integrale $\int_0^t \frac{1-e^x}{e^{2x}+1}\,dx$ ha limite finito per $t \to \infty$.
Sol. - Le cose sono diverse se $t \to +\infty$ oppure $t \to -\infty$. Nel primo caso la risposta è affermativa perché per $x \to +\infty$ l'integranda va a 0 di ordine superiore a tutte le potenze di $\frac{1}{x}$, e quindi ad esempio di $\frac{1}{x^2}$, che ha integrale finito. Nel secondo caso invece l'integranda tende a 1, e quindi certamente non è finita l'area della zona compresa tra l'asse x e il grafico della f.

d) Calcolare

$$\int_0^k xe^{-\frac{x^2}{2}}\,dx$$

e quindi dire se esiste finito il limite per $k \to +\infty$, e, in caso affermativo, quanto vale.
Sol. - L'integrale è ovviamente una funzione di k. Posto $\frac{x^2}{2} = t$ si ha $xdx = dt$ per cui basta calcolare le primitive di e^{-t} che sono $-e^{-t} + c = -e^{-\frac{x^2}{2}} + c$. (In particolare la funzione $f(k) = \int_0^k xe^{-\frac{x^2}{2}}\,dx$ è quella primitiva che si annulla per $k = 0$ e quindi corrisponde al valore $c = 1$.) Poiché la funzione integranda per $x \to +\infty$ va a 0 di ordine superiore a qualsiasi potenza della x, in particolare alla seconda, che ha integrale finito, la funzione ha integrale finito per $k \to +\infty$.

18. a) L'area compresa tra il semiasse delle x per $x > 1$ e il grafico della funzione

$$f(x) = \frac{x + e^{-x}}{x^2}$$

è finita? (Sugg.: si guardi di che ordine sono gli infiniti al numeratore e denominatore...)
Sol. - Gli infinitesimi sono del primo e del secondo rispettivamente, pertanto il quoziente è un infinitesimo del primo ordine; l'area *non* è finita.

b) Si studi, al variare del parametro reale a, la funzione $f(x) = |x|^a \lg |x|$ esplorandone anche la prolungabilità e l'eventuale derivabilità nello 0 e l'eventuale sommabilità su tutta la retta.
Sol. - Sono funzioni pari. Se $a > 0$ sono tutte prolungabili per continuità nello 0 ponendo $f(0) = 0$; per $a > 1$ sono derivabili e la derivata nel punto 0 vale 0. Pertanto per $a > 0$ c'è sommabilità in un intorno dello 0, mentre chiaramente non c'è sommabilità su una semiretta che va all'infinito. Se $a = 0$ la funzione tende a $-\infty$ ed è sommabile in un intorno di 0, mentre non lo è su una semiretta (intorno dell'infinito). Se $-1 < a < 0$ la funzione va all'infinito in un intorno di 0 ed è sommabile, se $a \leq -1$ va all'infinito e non è sommabile; su una semiretta che va all'infinito è sommabile se $a < -1$, non lo è se $-1 \leq a < 0$.

19. a) La funzione

$$f(x) = x^2 \cos \frac{1}{x^2}$$

non è definita per $x = 0$. È prolungabile per continuità in quel punto? In che modo?
La sua funzione integrale $\int_0^x f(u)\ du$ esiste? è derivabile? (*non si chiede di trovarla!*)
Sol. - È prolungabile perché ha limite 0. Come ogni funzione continua ha la funzione integrale, la quale è derivabile, e la derivata vale f.

b) Si scriva la formula di MacLaurin della funzione $f(x) = \lg(1 + x)$ arrestata al termine che contiene la derivata terza.
Sol. - $\lg(1 + x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3)$; arrestandosi al termine con x^3 quello che si trascura è in modulo minore di $\frac{x^3}{3}$.

c) Si scriva la formula di MacLaurin della funzione $f(x) = \tan x$ arrestata al termine che contiene la derivata terza.
Sol. Vd testo.

d) Quale è il polinomio di quinto grado che meglio approssima la funzione $x - \sin x$ in un intorno dello 0?
È quello che si ottiene scrivendo la formula di Taylor del seno arrestata al 5^o grado: $x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5}$.

20. a) Studiare la funzione

$$f(x) = \arctan \frac{1}{1-x^2}$$

(insieme di definizione, segno, continuità, derivabilità, attacchi, crescenza, decrescenza, massimi, minimi, eventuali asintoti verticali, obliqui o orizzontali). Giustificare le risposte.
Sol. - La funzione è pari, non è definita per $x = \pm 1$, è negativa per $|x| > 1$, è positiva per $|x| < 1$. Ha limite $-\pi/2$ per $x \to -1^-$ e $x \to 1+$, ha limite $+\pi/2$ per $x \to -1^+$ e per $x \to 1^-$, è decrescente negli intervalli $(-\infty, -1]$ e $]1, 0]$ (ma *non* da $-\infty$ a 0!), ha minimo in $x = 0$ che vale $\arctan 1 = \pi/4$, è crescente negli intervalli $[0, 1[$ e $]1, +\infty)$ (ma *non* da 0 a $+\infty$!), ha asintoto orizzontale sia destro che sinistro $y = 0$. Gli attacchi nei punti di discontinuità portano una derivata che vale -2 in -1 (sia da destra che da sinistra) e $+2$ in 1 (sia da destra che da sinistra). Attenzione: in $x = \pm 1$ *non* c'è derivabilità, perché non c'è la continuità! L'uguaglianza dei coefficienti angolari delle (semi)tangenti dice solo che queste sono parallele.

b) Studiare la funzione $f(x) = x \lg^2 x$ (continuità, eventuale prolungamento per continuità, attacchi, grafico). Calcolarne poi l'integrale tra 1 e 2. Esiste finito il suo integrale tra 0 e 1? Perché?
Sol. - Definita per $x > 0$. Ha limite 0 per $x \to 0^+$ e $+\infty$ per $x \to +\infty$, vale 0 in $x = 1$, per gli altri x è sempre positiva. Continua sul suo insieme di definizione, prolungabile in 0 ponendo $f(0) = 0$. È $f'(x) = \lg^2 x + 2 \lg x$: è la somma di due infiniti, ma quello col "+" è un logaritmo alla seconda, mentre quello col "-" è un logaritmo alla prima potenza e quindi la derivata va a $+\infty$ per $x \to 0^+$: la (semi)tangente coincide con l'asse delle y. È $f'(x) = 0 \Rightarrow \lg x = 0 \Rightarrow x = 1$; l'altro fattore $\lg x + 2$ si annulla in $x = e^{-2}$. In questo punto si ha un massimo relativo, in $x = 1$ si ha un minimo anche assoluto. Tra il punto di massimo e quello di minimo c'è un punto di flesso, che si ha in $x = e^{-1}$, dove la derivata prima ha un minimo. Non vi è asintoto obliquo, dato che $lim_{x \to +\infty} f'(x) = +\infty$. Il suo integrale tra 0 e 1 esiste finito perché abbiamo prolungato per continuità ed abbiamo ottenuto quindi una funzione continua su un intervallo limitato. Il suo integrale tra 1 e 2 si calcola integrando per parti due volte, prendendo come fattore finito il logaritmo quadrato la prima volta, e il logaritmo alla prima potenza la seconda.

c) Studiare la funzione $f(x) = x \arctan x$ (trovarne minimi e massimi, l'asintoto, se c'è, studiare il tipo di infinitesimo in un intorno di 0, grafico)

Sol. - Funzione pari, definita su tutto $\mathbb{R}$, vale 0 in $x = 0$, positiva altrove, quindi in $x = 0$ ha un minimo. In un intorno di $x = 0$ si comporta come x^2 (lo sviluppo di MacLaurin dell'arcotangente ha come primo termine x). Studiamola solo per $x > 0$, il resto del grafico si ottiene come simmetrico rispetto all'asse delle y. Ha asintoto obliquo $y = ax + b$, di coefficiente angolare $a = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(z)}{x} = \frac{\pi}{2}$; per trovare b si ha $b = \lim_{x\to+\infty} f(x) - \frac{\pi}{2}x = \lim_{x\to+\infty} x \arctan x - \frac{\pi}{2}x = \lim_{x\to+\infty} x\big(\arctan x - \frac{\pi}{2}\big)$. Si tratta di un caso del tipo $+\infty - \infty$ trasformato in un caso $0 \cdot \infty$. Lo trasformiamo in un caso $\frac{0}{0}$ per poi applicare la regola di L'Hospital:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\arctan x - \frac{\pi}{2}}{\frac{1}{x}} = (H) = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{1}{1+x^2}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to+\infty} -\frac{x^2}{1+x^2} = -1.$$

L'asintoto è dunque $y = \frac{\pi}{2}x - 1$. La funzione approssima l'asintoto venendogli da sopra. La derivata prima è

$$f'(x) = \arctan x + \frac{x}{1+x^2}$$

La funzione è crescente per $x > 0$, decrescente per $x < 0$. La derivata seconda è $f''(x) = \frac{2}{(1+x^2)^2}$, sempre > 0, non vi sono flessi (il grafico assomiglia ad un ramo di iperbole racchiuso (sopra l'asse delle x) tra i due semiasintoti $y = \frac{\pi}{2}x - 1$ e $y = -\frac{\pi}{2}x - 1$.

d) Studiare la funzione $f(x) = \frac{e^{-x^2}}{1+x^2}$.
Sol. - Funzione pari, sempre positiva, che vale 1 per $x = 0$; la derivata ha denominatore sempre positivo e numeratore $2xe^{-x^2}(-2 - x^2)$ che si annulla in $x = 0$ ed è negativa per $x > 0$: quindi massimo in 0, crescente per gli x negativi, decrescente per gli x positivi; la f tende a 0 per $x \to \infty$; la f' del pari; ci sono quindi due flessi in due punti simmetrici rispetto all'asse delle y.

21. a) Calcolare

$$\lim_{x\to 0} \frac{1 - \cos 2x}{e^{3x} - 1 - 3x}$$

Sol. - $\frac{4}{9}$ (due volte regola dell'Hospital; si tratta di due infinitesimi del secondo ordine).

b) Quanto vale $\lim_{x\to 0}(1 + x)^{\frac{1}{x}}$?
Sol. - È lo stesso limite che si ha per $x \to +\infty$ di $(1 + \frac{1}{x})^x$ che fa e.

c) Si scriva lo sviluppo di MacLaurin della funzione che si trova al denominatore del caso a).

Sol. - Si ha lo sviluppo $e^{3x} = 1 + 3x + \frac{(3x)^2}{2!} + \frac{(3x)^3}{3!} + o((3x)^3)$ e quindi sottraendo $1 + 3x$....

d) Si dia la definizione di *parte principale* e *parte complementare* di un infinitesimo. Si scrivano quindi le parti principali degli infinitesimi per $x \to 0$

$$x - \sin x \cos x, \quad \tan x - \sin x^2, \quad 1 - \cos x - \frac{x^2}{2} + \sin x - x$$

Sol. - La prima è la stessa di $x - \sin x$ (l'infinitesimo è del terzo ordine, il coseno si avvicina a 1), la seconda q̀uella della tangente (il seno di x^2 è del secondo ordine), la terza è $-\frac{x^3}{3!}$ (dei primi tre termini resta un infinitesimo del quarto ordine, mentre del quarto e quinto termine resta appunto l'infinitesimo del terzo ordine citato).