MATEMATICA I
Corsi di Laurea in Ingegneria Elettrotecnica e in Ingegneria Energetica
Esercitazione in classe del 5.11.2007. **N. B.: le risposte vanno giustificate**
Gli abbozzi di soluzioni sono in fondo

1. a) Una funzione $f(x)$ definita nell'intervallo $[-2,5]$ ha limite per $x \to 3$. Allora tale funzione è limitata in un intorno di 3. V ☐ F☐
   b) Una funzione limitata in un intorno di 3 ha limite per $x \to 3$. V ☐ F ☐
   c) Una funzione strettamente crescente in un intervallo e ivi derivabile, ha derivata sempre strettamente positiva. V ☐ F☐

2. a) Si dica cosa significa $\lim_{x\to 3} f(x) = +\infty$ e si faccia un grafico di una funzione che goda di questa proprietà (eventualmente se ne scriva anche l'equazione).
   b) Si dica cosa significa $\lim_{x\to +\infty} f(x) = -\infty$ e si faccia un grafico di una funzione che goda di questa proprietà.
   c) Si dica cosa significa $\lim_{x\to -1^-} f(x) = +\infty$ e si faccia un grafico di una funzione che goda di questa proprietà.

3. a) Si dia la definizione di continuità di una funzione f in un punto x_0.
   b) La funzione f ha limite ℓ finito per $x \to x_0$; è limitata in un intorno destro di x_0? Se sì, dire perché; se no, trovare un controesempio.
   c) Sia f definita e continua in un intervallo contenente al suo interno il punto $x = 3$. La funzione è limitata in un intorno di 3? Si giustifichi la risposta, scrivendo eventualmente delle disuguaglianze opportune o fornendo un controesempio.

4. a) Il limite della somma è sempre uguale alla somma dei limiti, quando questi esistono e sono finiti entrambi? E viceversa, se esiste il limite per $x \to x_0$ di una somma di due funzioni f_1 ed f_2, esistono i limiti dei singoli addendi per $x \to x_0$?

5. a) Si faccia un pezzo di grafico di una funzione che sia per $x \to x_0$, rispettivamente, un infinitesimo di ordine 1, un infinitesimo di ordine inferiore a 1, un infinitesimo di ordine superiore a 1.
   b) Si calcoli $\lim_{x\to 0} \frac{\cos x - 1}{x}$ e se ne faccia un abbozzo del grafico in un intorno dello 0.
   c) Si enunci il teor. del confronto (o dei carabinieri) e si faccia un esempio in cui tale teorema viene utilizzato.
   d) La funzione $\sqrt{\lg(\tan x)}$ è limitata? Se ne trovi l'insieme di definizione e l'immagine.
   e) La funzione $\sqrt{\lg(\arctan x)}$ è limitata? Se ne trovi l'insieme di definizione e l'immagine.

6. a) Si dia la definizione di funzione composta e si trovi un esempio in cui $f \circ g \neq g \circ f$.
   b) Se f e g sono crescenti in un intervallo $[a, b]$, $f \circ g$ è del pari crescente nello stesso intervallo? Se sì, lo si dimostri, se no si trovi un controesempio.
   c) Se f è una funzione definita e limitata su tutto $\mathbb{R}$, e invece g è una funzione definita ma non limitata su tutto $\mathbb{R}$, la funzione $f \circ g$ è limitata su tutto $\mathbb{R}$?. E la funzione $g \circ f$ è limitata su $\mathbb{R}$?

7. a) Sia g derivabile in $x = 0$; si dica se è vera o falsa ciascuna delle suguenti asserzioni: 1) $|g|$ è derivabile in 0; 2) $|g|$ è continua in 0; 3) $|g|$ non è derivabile in 0; 4) esiste $g''(0)$.
   b) Si dica quali sono gli insiemi di definizione e le immagini delle funzioni $f_1(x) = \arccos x$ e $f_2(x) = \arcsin x$.

8. a) Si enunci il teor. di Weierstrass e si trovino degli esempi per i quali, se non è soddisfatta una delle ipotesi, non è soddisfatta neanche la tesi.
   b) Data una funzione f derivabile in un intervallo contenente il punto $x = 3$, sia $f(3) = 2, \quad f'(3) = -4$. Si scriva l'equazione della retta tangente al grafico della funzione nel punto $(3, 2)$.
   d) Si enunci il teor. di Lagrange e si presenti una sua interpretazione grafica.
   e) La funzione $f(x) = | \ \lg|x| \ |$ ha un valore minimo? Se sì, quanto vale e dove lo assume?

9. a) Si studi la funzione $x^2(\sin x + 3)$ (insieme di definizione, eventuale parità o disparità, eventuale periodicità, limiti per $x \to +\infty$ e per $x \to -\infty$, crescenza, derivata, abbozzo qualitativo del grafico).
   b) Come in a) per la funzione $x \ \sin x$. Per $x \to 0$ è infinitesima? Di che ordine? Giustificare le risposte.
   c) Come in a) per la funzione $f(x) = \lg(\sin x + 10)$.

10. a) La funzione $\frac{\tan x}{x} + \frac{1}{x}$ ha limite (finito) per $x \to 0$? Se sì, quanto vale? E ha limite (finito) per $x \to -\infty$? Se sì, quanto vale?
    b) La funzione $\frac{\arctan x}{x} + \frac{1}{x}$ ha limite (finito) per $x \to 0$? Se sì, quanto vale? E ha limite (finito) per $x \to -\infty$? Se sì, quanto vale?
    d) La funzione $\frac{\arcsin x}{x} - \frac{1}{x}$ ha limite (finito) per $x \to 0$? Se sì, quanto vale? E ha senso chiedersi se ha limite (finito) per $x \to -\infty$? Se sì, quanto vale?

11. a) f è un infinitesimo del 2^o ordine e g è un infinitesimo del 1^o ordine per $x \to x_0$. Le funzioni $f + g$ ed $f \cdot g$ sono anch'esse infinitesime? Se sì, di che ordine, rispettivamente?
    b) f è un infinito del 2^o ordine e g è un infinito del 1^o ordine per $x \to x_0$. Le funzioni $f + g$ ed $f \cdot g$ sono anch'esse degli infiniti? Se sì, di che ordine, rispettivamente?
    c) Dare degli esempi in cui f e g sono infiniti entrambi del primo ordine per $x \to +\infty$, e una volta il limite per $x \to +\infty$ di $f + g$ risulta $+\infty$, una volta 0, una volta $-\infty$.
    d) Qual è il limite per $x \to 0^+$ di $f(x) = x^\alpha \lg x$ con α reale e positivo?

12. a) Si dia la definizione di maggiorante. Un insieme superiormente limitato ha sempre maggioranti?
    b) Si dia la definizione di minorante. Un insieme superiormente limitato ha sempre minoranti?

13. Data la funzione $\arctan(\arcsin(3x - 2))$, se ne trovi l'insieme di definizione, la derivata, l'immagine e si dica se esistono punti in cui la derivata (anche semplicemente destra o sinistra) va all'infinito.

14. a) Si studi la funzione $f(x) = x^2 e^{-x}$. Quale è la sua immagine?
    b) Si studi la funzione $f(x) = \lg(x^2 + 1)$ e si trovi almeno uno dei punti la cui esistenza è assicurata dal teor. di Lagrange sull'intervallo $[0, 2]$.
    c) Senza calcolare derivate, si studi la funzione $f(x) = x^2|\sin(\pi x)|$ (ins. di

def., comportamento nello 0, punti n cui si annulla, eventuali limiti, continuità, derivabilità, limitatezza, grafico approssimativo).

****

Abbozzi di soluzioni - I numeri si riferiscono al testo di G. Artico.

1. a) Falso. La funzione ha limite, ma non è scritto che questo sia finito. Se ad es. è $+\infty$,la f è $> M$ in un intorno di 3. Sarebbe vero se fosse scritto che il limite è finito.
   b) Falso. $\sin \frac{1}{x-3}$ è limitata in un intorno di 3, ma non ha limite.
   c) Falso. x^3 è strettamente crescente, eppure la sua derivata è 0 in 0.
2. a) Def. 28, p. 76, sostituendo 3 ad x_0. Esempio $\frac{1}{|x-3|}$.
   b) Def. 30, p. 81. Esempio: $f(x) = -x$.
   c) Def. 28, con "allo tesso modo" di p. 77. Esempio $f(x) = \frac{-1}{x+1}$.
3. a) Def. 39, p. 96.
   b) Sì: infatti per la def. di limite in un certo intorno $]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$ è
   $\ell - \epsilon < f(x) < \ell + \epsilon$, e quindi a maggior ragione ciò succede per gli
   $x \in]x_0 - \delta, x_0[$.
   c) La f è continua e quindi ha limite finito $\ell = f(3)$ per $x \to 3$, pertanto è limitata in un intorno di 3 (vd. b)).
4. a) Sí (vd. prop. 34, p. 85). Il viceversa non è vero (p. 84, nota 7), ad es. $f(x) = \sin \frac{1}{x}$ e $g(x) = -\sin \frac{1}{x}$ non hanno limite per $x \to 0$, mentre la loro somma è sempre nulla e quindi ha limite 0. Altro esempio, se si considera che x_0 possa anche essere ∞, $f(x) = x$ e $g(x) = \sin x$ per $x \to \infty$.
5. Il grafico di un infinitesimo del 1^o taglia l'asse delle ascisse con una inclinazione diversa da 0, quello di ordine inferiore a 1 lo taglia con tangente verticale, quella di un infinitesimo di ordine > 1 ha tangente orizzontale.
   b) Il numeratore è un inf.mo del 2^o ordine, quindi la frazione è un inf.mo del 1^o. Per il grafico vd. a).
   c) Vd. p. 83-84; noi lo abbiamo usato nello studio di $x \sin x$ per $x \to 0$ e di $x + \sin x$ per $x \to \infty$.
   d) No (la tangente va all'infinito per $x \to (\pi/2)^-$ e il suo logaritmo va del pari all'infinito, e la radice del logaritmo del pari). L'ins. di def. è costituito dagli intervalli in cui il radicando è non negativo, quindi in cui l'argomento del logaritmo è ≥ 1, quindi per $x \in [\pi/4 + K\pi, \pi/2 + K\pi[$.
   e) Sì; l'argomento del logaritmo deve essere ≥ 1 (e quindi $x \geq \tan 1$). L'immagine è $[0, \sqrt{\lg(\pi/2)}[$.
6. a) Vd. p. 103; un controesempio è l'es. di p. 104.
   b) Sì. Infatti dalla crescenza di entrambe le funzioni si ricava:
   $x_1 < x_2 \Longrightarrow f(x_1) \leq f(x_2) \Longrightarrow g(f(x_1)) \leq g(f(x_2))$.
   c) La funzione $f \circ g$ è limitata. Infatti, qualsiasi sia l'immagine di g la f ha valori compresi entro un certo intervallo limitato $[a, b]$. Non così la funzione $g \circ f$, la quale può essere limitata oppure no: se $f(x) = \sin x$ e $g(x) = 1/x$ la funzione $g \circ f$ va all'infinito ogni volta che il seno si annulla; se invece $f(x) = \sin x + 3$ la f rimane sempre compresa tra 2 e 4, e $g \circ f$ rimane sempre compresa tra 1/4 e 1/2.

7. 1) Falsa: vd. $|x|$; 2) Vera: se una funzione è continua, lo è anche il suo modulo; 3) Falsa: $|g|$ può essere derivabile, ad esempio se è tutta positiva coincide con g; 4) Falsa: nulla si sa dell'esistenza della derivata seconda.
   b) Vd. pp. 94-97.

8. a) Vd. p. 100; il controesempio è a p. 102.
   b) La retta ha equazione $y - y_0 = m(x - x_0)$ dove $m = f'(x_0)$, qundi nel nostro caso $y = -4(x-2)+2 = -4x+10$.
   d) (La c) manca per errore) Vd. p. 166; l'interpretazione geometrica è la fig. di p. 165.
   e) Sì, il minimo è 0 ed è assunto nei punti $x = \pm 1$.

9. La funzione è definita dappertutto, non è né pari né dispari, non è periodica, ha limite $+\infty$ per $x \to \infty$, è sempre positiva e sempre compresa tra $2x^2$ e $4x^2$. È $f'(x) = 2x(\sin x + 3) + x^2(\cos x)$ che si annulla in $x = 0$; inoltre si annulla in altri infiniti punti, che si ottengono dall'uguaglianza $2\sin x + 6 = -x\cos x$: il primo membro è una funxzione periodica compresa tra 4 e 8 e il secondo, che ha oscillazioni sempre più grandi per $x \to \infty$ incontra il primo infinite volte.
   b) Studiato in classe: pari, non ha limite per $x \to \infty$, avendo oscillazioni tra x e $-x$ per $x \to 0$ è un inf.mo del 2^o ordine.
   c) Periodica, il suo grafico è sempre compreso tra il logaritmo di 9 e il logaritmo di 11. È $f'(x) = \frac{\cos x}{\sin x + 10}$ che si annulla infinite volte per $x = \frac{\pi}{2} + K\pi$.

10. a) Per $x \to 0$ non ha limite finito; ha invece limite infinito (il primo addendo tende a 1, il secondo tende a $-\infty$ da destra e $+\infty$ da sinistra). Non ha limite per $x \to \infty$: non è definita su un intorno di ∞.
    b) Per $x \to 0$ come il caso a); per $x \to -\infty$ ha limite 0, dato che entrambi i termini tendono a 0.
    d) (La c) non esiste per errore) Per $x \to 0$ come in a). Non ha senso chiedersi del limite per $x \to \infty$ perché non è definita al di fuori di $[-1, +1]$.

11. a) $f + g$ è un infinitesimo del 1^o, $f \cdot g$ del 3^o.
    b) $f + g$ è un infinito del 2^o, $f \cdot g$ del 3^o.
    c) $f(x) = x,\ g(x) = x,\ f(x) = x,\ g(x) = -x,\ f(x) = x,\ g(x) = -2x.$
    d) Il limite è 0 (applicare la regola di L'Hôpital). In particolare, se $\alpha \le 1$ la tangente al grafico è verticale, se $\alpha > 1$ la tangente è orizzontale. Se fosse stato $\alpha \le 0$ il limite sarebbe stato $-\infty$.

12. a) Maggiorante di un insieme I di numeri reali è un numero M tale che $\forall x \in I\ x \le M$. L'essere limitato superiormente coincide con la definizione dell'esistenza di un maggiorante.
    b) Minorante è un numero minore uguale di tutti gli elementi dell'insieme. l'essere *superiormente* limitato non implica l'esistenza di un minorante, ad esempio l'inisieme di tutti i numeri negativi.

13. L'insieme di definizione deve soddisfare $-1 \le 3x - 2 \le 1$, cioè $\frac{1}{3} \le x \le 1$; l'arcoseno varia tra $-\pi/2$ e $+\pi/2$, quindi l'arcotangente varia tra $\arctan -\pi/2$ e $\arctan +\pi/2$. È

$$f'(x) = \frac{1}{1 + \arcsin^2(sx - 2)} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - (3x-2)^2}} \cdot 3$$

    che va all'infinito quando $x \to 1/3^+$ e $x \to 1^-$.

14. a) Sempre positiva, tende a 0 per $x \to +\infty$, tende a $+\infty$ per $x \to -\infty$; vale 0 per $x = 0$, nel cui intorno assomiglia ad una parabola; la sua immagine sono i reali non negativi. È $f'(x) = e^{-x}x(2-x)$ che si annulla in 0 (punto di minimo assoluto) e in 2 (punto di massimo relativo).
b) Pari, mai negativa, vale 0 per $x = 0$, tende a $+\infty$ per $x \to \infty$. Ha minimo in 0; decrescente per x negativi, crescente per x positivi. Il toer. di Lagrande dice che $\exists\ c :\ f'(c) = \frac{\lg 5}{2}$; poiché $f'(x) = \frac{2x}{x^2+1}$ segue che c è uno dei (due) punti che risolvono l'equazione $4x = \lg 5(x^2+1)$.
c) Pari, sempre positiva o nulla. Nei punti in cui $x = n$ con $n \in \mathbb{N}$ la funzione vale 0, dove $x = 1/2 + K$ con $K \in \mathbb{Z}$ il grafico della funzione si appoggia a quello di x^2. La f è continua, in $x = 0$ si comporta come $|x|^3$, per cui è un infinitesimo del 3^0 ordine (quindi derivabile), non derivabile negli altri punti in cui vale 0; non ha limite per $x \to \infty$, illimitata, ha infinite oscillazioni.