

DIDATTICA DELLA MATEMATICA

DAI LUCIDI DELLE LEZIONI

Docente Margherita Motteran

05 aprile 2005

1. Proprietà focali dell'ellisse

1a. Introduzione

Definizione: Dicesi *ellisse* il luogo geometrico dei punti di un piano per cui è costante la somma delle distanze da due punti fissi, detti *fuochi*.

Indicati questi fuochi con F ed F', per ogni punto P dell'ellisse è

$$\overline{FP} + \overline{F'P} = 2a,$$

ove si è indicata con 2a la somma costante delle misure di FP e di F'P.

Dopo

- aver introdotto il sistema di assi cartesiani ortogonali avente come asse delle ascisse la retta FF', detta *asse focale* dell'ellisse, e come origine il punto medio del segmento FF',
- aver indicato con 2c la misura del segmento FF' ($\rightarrow F = (-c,0); F' = (c,0)$)
- aver posto $b^2 = a^2 - c^2$,
- avere indicato con P (x,y) un generico punto dell'ellisse
si perviene all'equazione

$$(1) \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

che rappresenta l'ellisse ed è detta equazione *canonica*.

1b. Proprietà focali dell'ellisse riferite alle tangenti

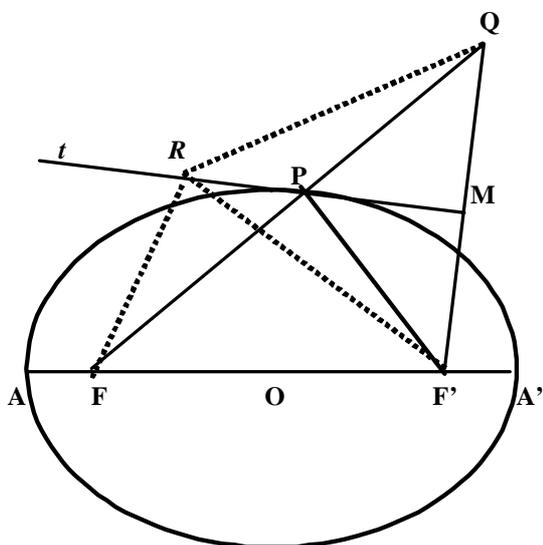


Figura 1

Consideriamo l'ellisse rappresentata in figura 1.

Prolunghiamo il raggio focale FP, dalla parte di P, di un segmento PQ = F'P.

Poiché $\overline{FQ} = \overline{FP} + \overline{PQ} = \overline{FP} + \overline{PF'}$

$$\rightarrow \overline{FQ} = 2a$$

Congiungiamo F' con Q. Pertanto, il triangolo F'PQ è isoscele e la retta t passante per P e perpendicolare a F'Q è bisettrice dell'angolo F'PQ e asse del segmento F'Q.

Per qualsiasi punto $R \neq P$ di t si ha $\overline{FR} + \overline{RF'} = \overline{FR} + \overline{RQ}$.

Poiché $\overline{FR} + \overline{RQ} \neq \overline{FQ} \rightarrow \overline{FR} + \overline{RF'} \neq 2a$

- equazione dell'asse di simmetria: $x = \frac{-b}{2a}$
- coordinate del vertice: $V = \left(-\frac{b}{2a}; -\frac{b^2 - 4ac}{4a} \right)$
- coordinate del fuoco $F = \left(-\frac{b}{2a}; \frac{1 - (b^2 - 4ac)}{4a} \right)$
- equazione della direttrice $y = -\frac{1 + b^2 - 4ac}{2a}$

2b. Proprietà focali della parabola riferite alle tangenti

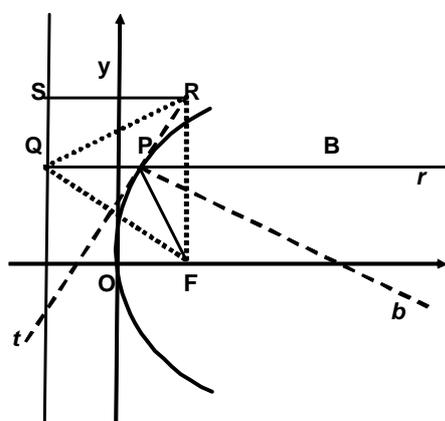


Figura 3

Consideriamo la parabola rappresentata in figura 3, ove il sistema cartesiano di riferimento ha l'origine nel vertice della parabola e l'asse delle ordinate parallelo alla direttrice della stessa.

Consideriamo una retta r parallela all'asse della parabola e indichiamo con P il punto in cui questa retta interseca la parabola. Sia Q il punto in cui questa retta, interseca la direttrice \rightarrow

$$FP \cong PQ \rightarrow$$

il triangolo FPQ è isoscele e quindi la

retta t , passante per P e perpendicolare a QF è bisettrice dell'angolo FPQ e asse del segmento QF . \rightarrow Se $R \neq P$ è un generico punto di t ,

$$QR \cong RF, QR > SR, \rightarrow RF > SR,$$

$\rightarrow R$ non può appartenere alla parabola \rightarrow la retta t incontra la parabola solo nel punto P .

$\rightarrow t$ è la retta tangente alla parabola nel punto P .

Gli angoli QPF e BPF sono adiacenti e la retta t è bisettrice dell'angolo QPF \rightarrow la retta perpendicolare a t e passante per P biseca l'angolo BPF . \rightarrow se una sorgente luminosa puntiforme è posta nel fuoco della parabola i raggi luminosi che partono da F e si "riflettono" sulla parabola, dopo la riflessione, proseguono in direzione parallela all'asse della parabola. Invece, se un fascio di luce parallelo all'asse della parabola si riflette su di essa ...