Scuola Interateneo di Specializzazione per la Formazione
degli Insegnanti della Scuola Secondaria del Veneto
ANNO ACCADEMICO 2004-2005
INDIRIZZO SCIENTIFICO TECNOLOGICO

DIDATTICA DELLA MATEMATICA

LICIDI DELLE LEZIONI
Docente Margherita Motteran
15 marzo 2005

1. Introduzione
Una domanda:

Quale matematica insegnare nelle discipline in cui si pongono problemi che si risolvono utilizzando conoscenze e abilità matematiche anche non banali?
I libri di testo delle discipline di area professionale contengono spesso riferimenti a concetti matematici, di cui spesso forniscono descrizioni molto sintetiche, finalizzate all'applicazione. E' importante che i docenti siano in grado di valutare la correttezza di queste presentazioni e di proporre agli studenti riferimenti concettuali corretti .
In questo corso si proporrà una rivisitazione di alcuni argomenti fondamentali di frequente utilizzazione nella risoluzione di problemi tecnico–scientifici e si indicheranno alcune difficoltà incontrate dagli studenti.
Queste note contengono gli schemi delle lezioni. Un'esposizioni più dettagliata è contenuta nel testo base indicato per il corso

2. Da ricordare a proposito di insiemi:

La definizione di Cantor (1845-1918):
"Un insieme è una collezione di oggetti, determinati e distinti, della nostra percezione o del nostro pensiero, concepiti come un tutto unico; tali oggetti si dicono elementi dell'insieme."

Due modi per per definire un insieme:
"Insieme P20 dei numeri pari minori di 20"

- un elenco (definizione per estensione)
  P20= {0,2,4,6,8,10,12,14,16,18}

- una proprietà
  P20 = {*n* $\in$ *N; n è divisibile per 2, n minore di 20*}

Osserviamo la frase:
"n è divisibile per 2"
E' un ***predicato***
E' una frase in cui interviene un simbolo, nel nostro caso *"n"*, che rappresenta un generico numero naturale. Per ciascun fissato numero naturale *n* tale predicato può essere vero oppure (*aut*) falso.
Esso può essere rappresentato da una scrittura, ad esempio: P(*n*)

	P(8)	vero
→		
	P(11)	falso

Nel linguaggio degli insiemi, i quantificatori giocano un ruolo importante (e molti studenti incontrano difficoltà a comprenderne il significato)

QUANTIFICATORI: $\forall$ $\exists$

Consideriamo la seguente proprietà
$P(x) \leftrightarrow x + 3 > 5$

- E' vero o falso che $\forall x \in N$, vale $P(x)$?
- E' vero o falso che $\exists x \in N$, per cui vale $P(x)$?

- Determina un insieme A tale che $A \subseteq N$ e che $\forall x \in A$ vale $P(x)$
- Determina un insieme B tale che $B \subseteq N$ e che risulti falso che $\exists x \in B$ per cui vale P(x

- *…e se P(x) è considerata in R?.......*

- Quale delle seguenti espressioni significa che ***"Ogni numero intero è multiplo di 7"?*** Quale invece significa: *"Non è vero che ogni numero intero è multiplo di 7"*

1. $\exists\, a \in Z, \exists\, b \in Z,: a = 7b$ ***2.*** $\exists\, a \in Z, \exists\, b \in Z,: a \neq 7b$

3. $\exists\, a \in Z, \forall\, b \in Z,: a = 7b$ 4. $\exists\, a \in Z, \forall\, b \in Z,: a \neq 7b$

5. $\forall\, a \in Z, \exists\, b \in Z,: a = 7b$ 6. $\forall\, a \in Z, \exists\, b \in Z,: a \neq 7b$

7. $\forall\, a \in Z, \forall\, b \in Z,: a = 7b$ 8. $\forall\, a \in Z, \forall\, b \in Z,: a \neq 7b$

Può risultare difficile la comprensione di frasi comprendenti negazioni e quantificatori…..
Prova d'Accesso a Ingegneria 2002/2003

- Domanda 17. L'esatta negazione, nel piano, dell'affermazione "esistono rette parallele" è equivalente a:

(a) tutte le rette sono incidenti;
(b) esistono rette non parallele;
(c) tutte le rette sono parallele;
(d) nessuna delle precedenti possibilità è corretta

Esiti
Tecn. Ind (821): 36% **Prof. (121): 26%** **LS (1078): 44%**

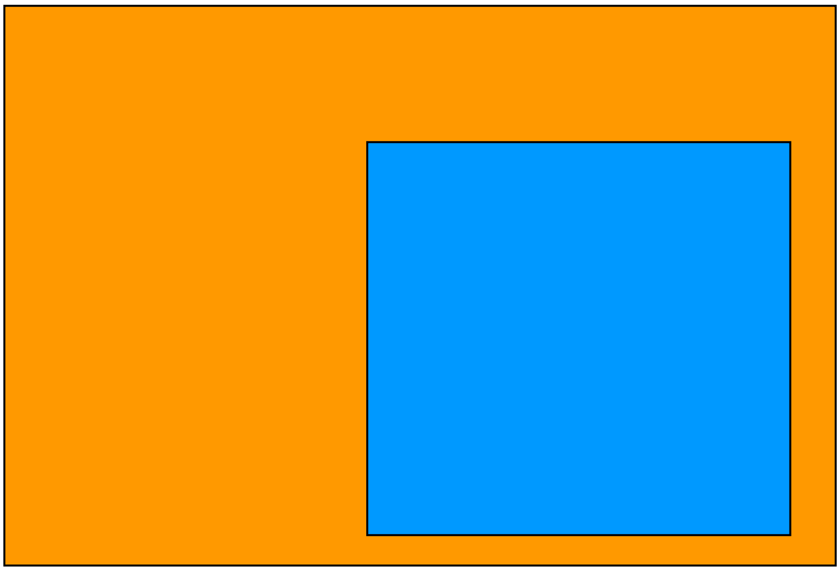
Domanda 26. L'esatta negazione della proposizione "tutti i pulcini sono gialli" e equivalente a:
(a) qualche pulcino non e giallo;
(b) esiste un pulcino nero;
(c) qualche pulcino e giallo;
(d) nessun pulcino e giallo.

Esiti
Tecn. Ind (821): 43% **Prof. (121): 28%** **LS (1078): 48%**

Molto più facile:
Domanda 21. Supponiamo si accettino come vere le seguenti premesse: “Tutte le persone sono intelligenti."e “Alcune persone sono istruite". Quale delle seguenti conclusioni si deduce come vera da esse ?
(a) Ogni persona istruita è intelligente;
(b) Qualche persona istruita non è intelligente;
(c) Ogni persona intelligente è istruita;
(d) nessuna delle precedenti possibilità è corretta.

Esiti
Tecn. Ind (821): 82% **Prof. (121): 58%** **LS (1078): 88%**

Si potrebbe rispondere al quesito 21 anche utilizzando una rappresentazione con un diagramma di Eulero-Venn, e utilizzando la definizione di sottoinsieme.



Una domanda:

Quanti sono i sottoinsiemi di in insieme *X, compreso l'insieme vuoto e X stesso?*

X	*P(**X**)*
$\varnothing$	$\{\varnothing\}$
{a}	$\{\varnothing, \{a\}\}$
{a,b}	$\{\varnothing, \{a\}, \{b\}, \{a,b\},\}$
{a,b,c}	$\{\varnothing, \{a\}, \{b\}, \{c\},\{a,b\}, \{a,c\}, \{c,b\}, \{a,b,c\}\}$

……………………………………………………………..

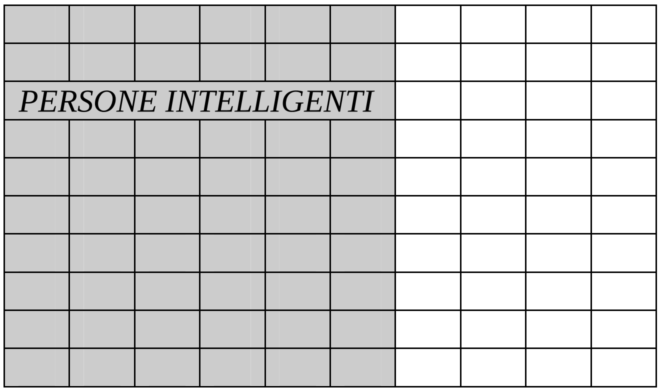
Si può far vedere graficamente che se aggiungo un elemento a un insieme il numero di sottoinsiemi di questo nuovo insieme è il doppio del numero di sottoinsiemi dell'insieme precedente……
……………………………………………………………..

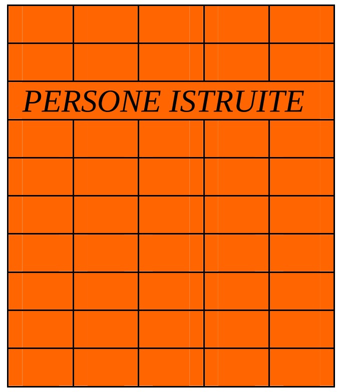
*Se **X*** contiene ***n*** elementi
*P(**X**)* contiene 2^n ***elementi***

Un'altra situazione:

Supponiamo si accettino come vere le seguenti premesse: “Il 60% delle persone sono intelligenti.“, “Il 50% persone sono istruite“.,
Ci sono persone intelligenti e istruite?
Ci sono persone né intelligenti né istruite?

Per facilitare la comprensione, si può disegnare…



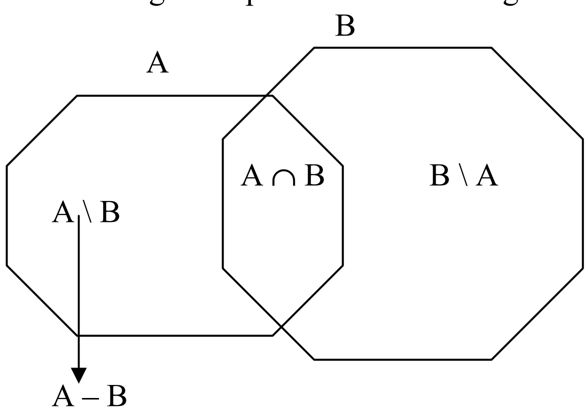


Spostando la tabella di colore arancio sull’altra, si possono visualizzare le diverse situazioni Possibili

Operazioni fra insiemi
Il quesito appena proposto si può ricondurre alle operazioni fra insiemi.
Nella scuola secondaria superiore si presentano almeno le prime due tra le seguenti operazioni fra insiemi

Unione $\cup$,
Intersezione $\cap$,
Differenza \

Una rappresentazione grafica per richiamarne il significato:



Insieme Complementare

A\ B si dice
complementare di A rispetto a B.

(si scrivew anche A’ oppure Ā)

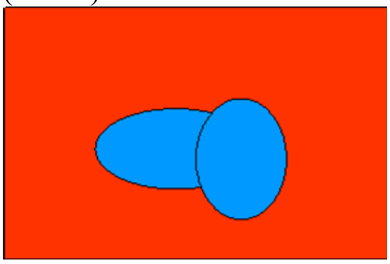
Un problema con “unione, intersezione, complementare”

Se due insiemi A e B sono sottoinsiemi di uno stesso insieme Y e se indichiamo con

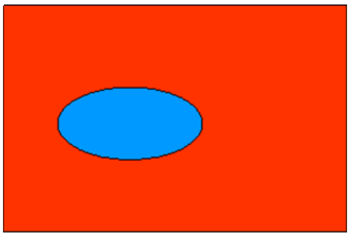
- $(A \cup B)^C$ il complementare di $A \cup B$ rispetto a Y,
- A^C il complementare di A rispetto a Y,
- B^C il complementare di B rispetto a Y, è

$$(A \cup B)^C = A^C \cap B^C,$$

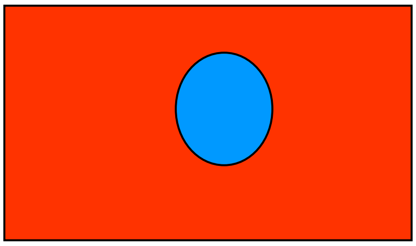
Anche questo problema si risolve più facilmente con una rappresentazione grafica:
(l'insieme Y è rappresentato dal rettangolo con sfondo rosso)
$(A \cup B)^C$



A^C



B^C



Il prodotto cartesiano e le funzioni

Definizione di coppia ordinata e di prodotto cartesiano

Funzione da un insieme A a un insieme B:
f: $A \rightarrow B$
se è assegnata una corrispondenza che associa ad ogni elemento $a \in A$ *uno e un solo elemento dell'insieme B*

Le coppie $(a, f(a))$, con $a \in A$ costituiscono un sottoinsieme di $A \times B$.

Funzioni con proprietà

- Suriettive

- Iniettive

- Biiettive, Corrispondenze biunivoche

(ABI, CAB, N°CC; codice fiscale; n°carta di credito)

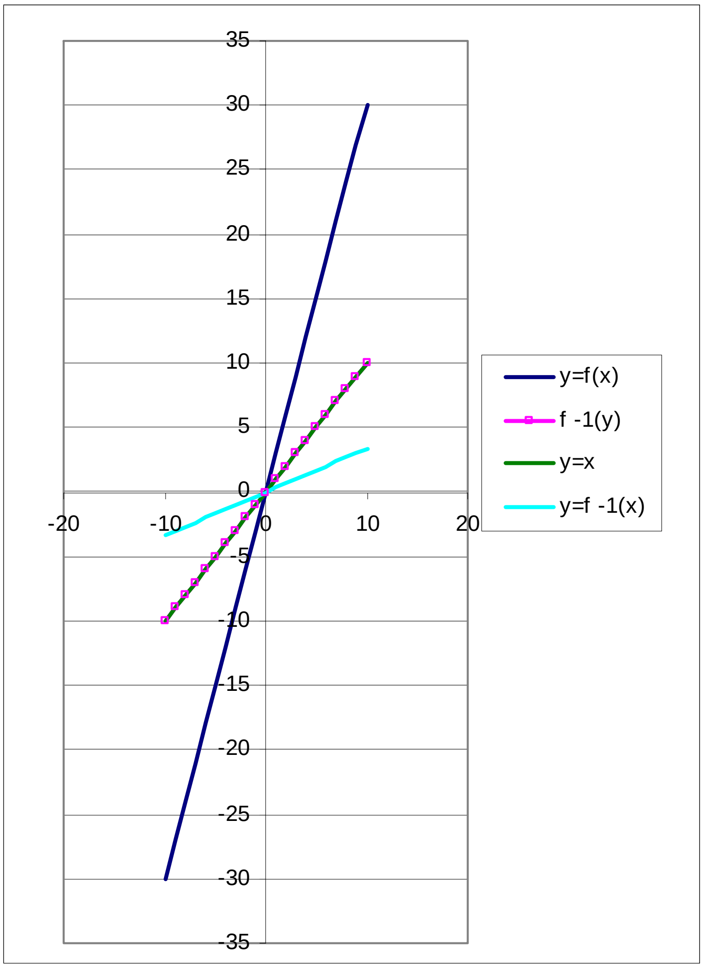
Codominio, per noi, è l'insieme al quale appartengono le f(x). Per comodità indicheremo con f(X) l'insieme dei valori assunti dalla funzione (sono detti anche immagini. **Attenzione al termine "valore"**)

Funzioni inverse

- **Funzione diretta: f: $X \rightarrow Y$ f(x) = y**
- **Funzione inversa f^{-1}: $f(X) \rightarrow X$**
  $x = f^{-1}(y) \leftrightarrow f(x) = y$

Nella nostra accezione di "codominio" sono invertibili soltanto le funzioni biiettive

Una rappresentazione grafica:



Alcuni esempi di funzioni e delle corrispondenti inverse

- $y = x^3 \rightarrow x = \sqrt[3]{y}$
- $y = 2^x \rightarrow x = \log_2 y$
- y = sen x → x = arcsen**y** **$-\pi/2 \leq x \leq +\pi/2$**

Funzioni composte

$y = f(g(x))$

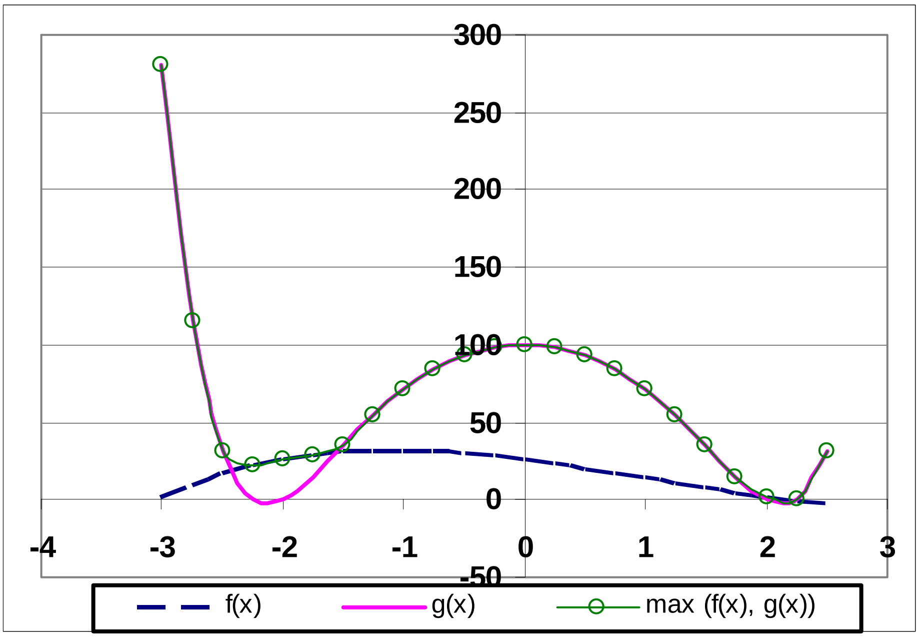
NB: il dominio di f(*g*(*x*)) è costituito dai soli valori *x* per i quali (*g*(*x*) appartiene al dominio di f.

E’ importante che gli studenti capiscano il concetto di funzione composta, che è fondamentale, ad esempio, per il calcolo delle derivate di funzioni

Funzioni “a tratti”

y = |x|
y = [x]   “parte intera di x”
y = max (f(x), g(x))

Una rappresentazione grafica, con Excel, di una funzione del tipo. y = max (f(x), g(x))



La funzione . y = max (f(x), g(x)) si sovrappone alternativament alla prima o alla seconda delle due funzioni
Osservazioni:

- Questo grafico si riferisce all’intervallo -2,5 ≤ x ≤ 3, volutamente non simmetrico rispetto all’origine del sistema di riferimento

Con i ragazzi è bene evidenziare che in prossimità dell’intersezione fra il grafico di f(x) e quello di g(x) il grafico di max (f(x), g(x)) descrive un archetto non sovrapposto ad alcuna delle due curve. Perché?

PS: La parte di lezione relativa alle funzioni e ai loro grafici è tratta da :
Vinicio Villani, *Matematica per discipline bio-mediche*, ed. MacGraw-Hill, cap. 6.
Altri spunti sono stati tratti da libri di testo adottati nella scuola secondaria superiore e da documenti sulla didattica della matematica per “non matematici”.