SSIS50315.tex

15.3.2005
ore 14.30-16.45

1ª Lezione

INSIEMI E FUNZIONI: PRIMA L'UOVO O LA GALLINA?

Introduzione

I concetti di *funzione* e di *insieme* si intrecciano durante quasi tutta la loro vita; a volte si è cercato di definire gli insiemi, e ci si è inbattuti nelle funzioni, che devono quindi essere definite a loro volta; e se si cerca di definire le funzioni si nota che esse sono definite su insiemi, che perciò devono essere conosciuti prima. Vediamo quindi una certa altalena tra i vari concetti che sono stati considerati base della matematica, e cercheremo di individuarne qualche punto.

"Ieri è attraccata nel porto di Genova una nave di 10.000 tonnellate di stazza, salpata da New York, che trasportava rottami di ferro. Trovare l'età del capitano."

Questo problema fu proposto agli studenti del primo anno di università da un professore di Analisi Matematica: "la settimana prossima portatemi la soluzione". Quando gli studenti la settimana successiva dissero che non erano riusciti a trovare la soluzione per quanti calcoli avessero fatto, e per quante induzioni avessero tentato, il professore rispose che avrebbero potuto andare a Genova, controllare il registro di arrivo delle navi, trovare il nome del capitano e il suo grado e quindi cercare il registro dei comandanti di navi mercantili e trovare la data di nascita del capitano. Effettivamente c'è una corrispondenza biunivoca tra la nave citata nel problema e l'età del suo comandante; l'incapacità degli studenti di trovare la soluzione dipende dal fatto che essi ritenevano di poter trovare la soluzione effettuando dei calcoli sui dati. L'impossibilità di rispondere a questo quesito tramite calcoli evidenzia un concetto di funzione del tutto nuovo rispetto a quello considerato dagli studenti, concetto che rispecchiava la nozione di funzione come ciò che individua dei valori tramite calcoli sui valori di una variabile. Il concetto di funzione come corrispondenza biunivoca tra elementi di due insiemi è invece ora considerato indipendente da formule che coinvolgono gli elementi di tali insiemi.

La teoria degli insiemi, riconoscibile come tale e come ramo della matematica a sé stante, è nata negli ultimi decenni dell'Ottocento: in quegli anni si verificano numerose precisazioni: ad esempio, nel campo che ci interessa oggi, la definizione di numero irrazionale, gli insiemi infiniti, e i diversi tipi di queste infinità.

Si abbandona l'idea di cosa sia naturale, cosa sia intuitivo. L'intervallo, la retta, i numeri, sembravano oggetti estremamente intuitivi: ci si avvicina invece a qualcosa che intuitivo non è più.

I grandi pilastri della matematica furono per secoli la geometria e i numeri: figure e misure. Nel sec VI a. C. la scuola pitagorica aveva come base della matematica i numeri interi e i loro quozienti, cioè i numeri razionali; e la scoperta della non razionalità della $\sqrt{2}$ fece crollare queste certezze. Qualche tempo dopo Euclide basò la sua costruzione sulla geometria: i numeri non erano più grandezze primitive, ma semplicemente misure di segmenti e di loro combinazioni, eventualmente misure di prodotti di segmenti, cioè di aree.

Le funzioni

I Greci conoscevano alcune *curve* particolari, ad esempio le sezioni di un cono: ellisse, iperbole e parabola, ma non avevano la necessità di considerare funzioni in generale. Questa necessità venne con la nascita della scienza moderna, cioè con la considerazione del moto dei corpi, la velocità, le traiettorie. In questo quadro più ampio si collocavano le curve già note e se ne scoprivano altre: l'*ellisse* è la traiettoria di un pianeta, la *parabola* è la traiettoria di un proiettile, la *cicloide* è la traiettoria di un punto di una ruota che rotola su una retta, o anche la traiettoria seguita da un corpo che sotto l'effetto della sola gravità mette il minimo tempo per congiungere due punti ad altezza diversa e non sulla stessa verticale. Può essere interessante sapere che invece Galileo credeva che tale traiettoria di minimo tempo fosse un arco di circonferenza. Possiamo notare qui un primo esempio del concetto di minimo, e di come esso vari a seconda delle condizioni fisiche in cui si opera: il segmento è la linea di minima lunghezza tra due punti ed è quindi anche di minimo tempo a velocità costante; invece, l'arco di cicloide è il percorso di minimo tempo ad accelerazione costante. La curva che risolve un problema di minimo tempo si dice *brachistocrona*, da un termine greco che significa "di tempo minimo": $\beta\rho\alpha\chi\upsilon\varsigma$ significa "breve" e $\chi\rho o\nu o\varsigma$ significa "tempo", da cui i nostri termini "cronico" (= che dura nel tempo), "cronometro" (misura del tempo). Anche adesso spesso ci preoccupiamo di seguire una strada o un itinerario in cui ci si mette il minimo tempo piuttosto che la strada più corta dal punto di vista dello spazio da percorrere: dove si saltano semafori, dove si sfruttano sensi unici, dove c'è meno traffico.

Il concetto di funzione, legata esclusivamente al suo grafico e alla regolarità di questo (esistenza della sua tangente) si sviluppò durante l'intero Medio Evo e il Rinascimento. Nella prima metà del sec. XVII fu Cartesio a porre nuovamente i numeri come espressioni primarie e a porre il piano cartesiano come luogo naturale della rappresentazione dei grafici delle funzioni. Ma l'evoluzione della scienza non ebbe vita facile in quel periodo: escono a pochi anni di distanza due opere fondamentali di Galileo e Cartesio: Galileo viene imprigionato e costretto ad abiurare perché sostiene la teoria copernicana; Cartesio ne è anch'egli sostenitore, ma dopo il processo a Galileo sceglie di non pubblicare un trattato sul mondo per evitare persecuzioni e si isola rifugiandosi presso la regina Cristina di Svezia, cioè in un paese protestante che non era sotto l'influenza del Papa di Roma e della Controriforma.

La prima apparizione della parola *funzione*, in latino *functio*, è registrata in un manoscritto del matematico e filosofo tedesco Goffredo Guglielmo Leibniz del 1673 in un significato ancora lontano da quello che avrà successivamente: Leibniz stava trattando una grandezza che dipendeva da una curva, e dice che "sta eseguendo una funzione rispetto alla curva"; per esempio sta calcolando la lunghezza del segmento di tangente dal punto di tangenza sulla curva all'asse delle x. Di fatto questa grandezza è una funzione di un punto variabile su una curva. Nello stesso manoscritto del 1673 la curva si suppone come una relazione tra x e y data tramite un'equazione. Nell'inverno del 1673 Leibniz, diplomatico a Parigi per conto di un principe tedesco, aveva fatto una visita a Londra dove aveva incontrato Newton e discusso con lui di quello che poi sarebbe stato il calcolo differenziale. Parigi e Londra erano due grandi capitali, all'avanguardia anche come livello di vita: in quegli anni si aprivano le prime "botteghe del caffè" a Parigi, e Londra si arricchiva con il commercio del tè che percorreva le rotte atlantiche. I due scienziati erano arrivati quasi contemporaneamente al concetto di *derivata*, e questo poi causerà una discussione per attribuire all'uno o all'altro la priorità della scoperta. In realtà la notazione che adesso viene usata per indicare la derivata di una funzione f, cioè $\frac{df}{dx}$, fu introdotta da Leibniz, mentre a Newton si deve la notazione usata in meccanica $\dot{y}$. Tornato sul continente, Leibniz scrive in estate il lavoro *Methodus tangentium inversa, seu de functionibus*, cioè "Metodo inverso delle tangenti, ovvero sulle funzioni". Ma egli intende le "funzioni" come grandezze che evidenziano un lavoro da compiere sulla curva, una funzione da espletare: essere tangente alla curva, o essere perpendicolare, o godere di un'altra proprietà sempre legata alla curva. Il termine "functio" viene poi usato con significato un po' vago per circa vent'anni, quando finalmente il matematico svizzero Giovanni Bernoulli in una lettera a Leibniz del giugno 1698 propone il termine "funzione di x" per una quantità che varia al variare della x; e Leibniz approva. Potremmo considerare quella lettera di Bernoulli come il battesimo del termine "funzione" nel significato di "quantità variabile al variare di un'altra", sempre, beninteso, calcolabile tramite un'espressione.

Se consideriamo la retta bisettrice del primo e terzo quadrante tutti diranno che essa è espressa tramite l'equazione $y = x$, dove la x varia su un intervallo della retta orizzontale. È ancora presto per parlare dell'intera retta, intendendola estesa fino all'infinito: il concetto di infinito fu più volte affrontato ancora dai Greci, ma non fu mai stabilito chiaramente. I Greci trattavano *procedimenti infiniti* come l'operazione di serie, ma si trovavano in imbarazzo davanti ad insiemi infinitamente grandi o infinitamente piccoli. Pitagora ancora credeva ad un punto come un corpicciolo molto piccolo, ma con le sue dimensioni. E Platone aveva fissato la riga e il compasso come gli unici strumenti con i quali dovessero essere risolti i problemi di geometria. Durante tutto questo periodo l'unico modo permesso per definire relazioni tra una quantità e un'altra era attraverso *formule*; dapprima, con Cartesio (prima metà del Seicento), tali formule coinvolgevano soltanto polinomi in x e y (*funzioni algebriche*): il grado era arbitrario, ma i calcoli effettivi erano svolti per gradi piccoli, e poi estesi, spesso in forma acritica, a gradi qualunque. Ovviamente, risolvendo i polinomi rispetto all'una o all'altra delle variabili si introducevano anche i radicali: ad esempio, avendo l'equazione

$$x^2 - y^3 = 0$$

la sua soluzione rispetto ad y portava

$$y = x^{\frac{2}{3}} = (\text{per convenzione}) = \sqrt[3]{x^2}.$$

Le funzioni quindi furono semplicemente un modo sintetico per esprimere un grafico sul piano cartesiano; e non veniva considerata una funzione che aveva bisogno di due espressioni; ad esempio la funzione così definita

$$\begin{cases} y = -x & x \leq 0 \\ y = x & x > 0 \end{cases}$$

che si scriverebbe $y = |x|$, $-\infty < x < +\infty$ non veniva considerata una funzione, in quanto essa non si esprimeva con un'unica espressione analitica. Le funzioni erano dunque soltanto quelle definite su un intervallo della retta, ed esprimibili colà tramite una sola formula coinvolgente funzioni soltanto algebriche.

Sulla espressione di altre funzioni tramite i polinomi uscì, nel 1715, un trattato in latino di Brook Taylor, discepolo di Newton, che presentava allora una formula di approssimazione, tramite polinomi, di funzioni aventi un grafico piuttosto regolare (cioè dotate di derivate), formula che prese appunto il nome di *formula di Taylor*. Taylor si occupò del fenomeno della corda vibrante, e determinò l'ampiezza e la frequenza della vibrazione in funzione della lunghezza d'onda, della lunghezza della corda, della sua densità e della sua tensione.

Qualche decennio più tardi anche lo svizzero Leonardo Euler (latinizzato in Eulero) si interessò alla corda vibrante. Eulero si interessò anche di musica e delle scale musicali. La suddivisione della scala musicale in sette note era già nota agli Egizi prima del X sec. a. C.; Pitagora, nel VI sec. a. C., studiò il rapporto tra i suoni e le lunghezze di corde vibranti, riconoscendo gli intervalli di ottava e quelli di quinta, e su questi ultimi basò una scala musicale, detta *scala pitagorica*, che non si discosta molto da quella attuale. Venendo a tempi più moderni, uno studio teorico molto approfondito sulle scale musicali e le tonalità fu fatto da Bach, che aveva studiato le teorie di Vivaldi (Vivaldi era molto noto in Germania), e a Bach si deve la scala temperata che adesso è su tutti i pianoforti (Bach l'aveva creata dapprima per l'organo, suo strumento d'elezione, e poi per il clavicembalo).

Eulero, di una ventina d'anni più giovane di Bach, prese a studiare il modello matematico della teoria musicale di Bach. Nel suo studio (scritto in latino) sulla corda vibrante cominciò a ritenere valide come funzioni anche espressioni comprendenti non più soltanto polinomi, ma anche funzioni trigonometriche, esponenziali e logaritmiche, in quanto approssimabili con polinomi tramite la formula di Taylor. Solo pochi anni dopo, nel 1739, il francese Jean Baptiste d'Alembert scriverà un trattato (in francese), in cui tratterà in dettaglio l'equazione della corda vibrante e la sua soluzione, che coinvolge funzioni trigonometriche.

(Detto di passaggio: per circa tre secoli, dalla metà del Cinquecento fino ad oltre la metà dell'Ottocento, dura la lenta estinzione del latino come lingua dei trattati scientifici, sostituita a poco a poco dalle lingue nazionali: l'italiano, l'inglese, il francese, e, con maggiore ritardo, il tedesco. Escono quindi, spesso contemporaneamente e sullo stesso tema, trattati in latino e in lingue nazionali.)

Se fosse lecito considerare funzioni anche oggetti ottenuti come limite di funzioni elementari, ad esempio serie di funzioni elementari, quelle che adesso scriviamo $\sum_i^\infty f_i$ e che sono il limite per $k \to \infty$ delle somme parziali $\sum_i^k f_i$, fu a lungo materia di discussione tra i matematici, finché nel primo decennio dell'Ottocento il matematico francese Giuseppe Giovanni Battista Fourier pose le serie trigonometriche alla base dei suoi studi sulla diffusione del calore. Il problema della diffusione del calore era un problema fondamentale per le artiglierie napoleoniche: lo sparo rendeva rovente la culatta del cannone, e c'era il problema di quando questa si fosse abbastanza raffreddata in modo da poter inserire un nuovo proiettile. Di argomento più distensivo fu invece lo studio della diffusione del calore sotto terra, allo scopo di localizzare meglio le cantine per tenere in fresco il vino anche durante l'estate.

Fourier, oltre che un matematico, fu un amministratore pubblico; seguì Napoleone nella campagna d'Egitto e lì rimase anche quando Napoleone tornò a Parigi; sotto la sua direzione scientifica, alcuni soldati scoprirono la stele di Rosetta, la famosa stele di basalto nero che poi servì per l'interpretazione della scrittura geroglifica, e che adesso si trova al British Museum a Londra. Fourier fu poi prefetto sotto Napoleone imperatore, ma quando i Borboni tornarono sul trono di Francia perse tale carica; divenne però segretario dell'Accademia di Francia, un posto di grande prestigio e ben pagato.

La tesi fondamentale di Fourier era che *ogni* funzione si potesse rappresentare, in un intervallo, mediante una serie in seni e coseni, cioè che per ogni funzione definita su un intervallo di lunghezza, ad esempio, T fosse valida una formula del tipo

$$f(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty}(a_n \cos\frac{2\pi}{T}nx + b_n \sin\frac{2\pi}{T}nx)$$

dove gli a_n e i b_n sono dei coefficienti opportuni che dipendono da come è fatta la f. Tale serie verrà detta, appunto, *serie di Fourier*. Egli non dimostrò questa formula, ma essa appariva vera in tutti i casi concreti che si presentavano. Provò a dimostrarla un matematico prussiano di origine francese, Peter Lejeune Dirichlet, e nel tentativo di trovare una dimostrazione scoprì in una funzione che invece non era rappresentabile tramite una serie di funzioni trigonometriche: una funzione che vale 1 sui razionali e 0 sugli irrazionali:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{Q} \\ 0 & x \in \mathbb{R} \setminus Q. \end{cases}$$

Tale funzione prese appunto il nome di *funzione di Dirichlet*. Non vi era formula che potesse descrivere questa funzione; e allora Dirichlet propose come definizione di funzione quella che si usa ancora adesso:

> *corrispondenza che a ciascun elemento x di un certo insieme di definizione associa uno ed un solo elemento y di un altro insieme*

indipendentemente dal modo con cui questa corrispondenza viene definita. A quel tempo si sottintendeva che le x e le y appartenevano ad insieme numerici, la x veniva chiamata *argomento* o *variabile indipendente* e la y veniva chiamata *valore* o *variabile dipendente*. Nel corso dei decenni successivi verranno trattati anche insiemi di altra natura, e quindi oggi consideriamo funzione anche la corrispondenza tra una nave e l'età del suo capitano.

La funzione di Dirichlet fu scoperta nel 1837. Tuttavia se passiamo ad espressioni che coinvolgono il concetto di limite, anche la funzione di Dirichlet ammette una rappresentazione come limite, non già sotto forma di serie trigonometrica, bensì il seguente:

$$f(x) = \lim_{n\to\infty}\lim_{m\to\infty}\cos(m!\pi x)^n.$$

Infatti, se prendiamo $x = p/q$, per un m abbastanza grande l'argomento del coseno è un multiplo pari di 2π, e il coseno quindi vale 1, e pertanto vale 1 anche per $n \to \infty$. Viceversa, se x è irrazionale, l'argomento del coseno non può risultare un multiplo intero di 2π per nessun valore di m; quindi il valore del coseno è strettamente minore di 1, e il limite per $n \to \infty$ è 0.

Può essere sorprendente che Galileo, Leibniz e Newton, che spaziarono dal Seicento alla prima metà del Settecento e pure si dedicarono intensamente a quello che adesso chiameremmo calcolo differenziale, operando quindi su funzioni e su equazioni differenziali principalmente del secondo ordine, quasi non si siano occupati dei fondamenti e di che cosa fosse una funzione. Di fatto la loro matematica era sempre legata a problemi fisici, per i quali i dati erano numerici, e l'esistenza delle soluzioni di equazioni erano garantite dal buon senso e dal comportamento dei fenomeni naturali. E del resto anche le funzioni di variabile complessa ebbero un grande sviluppo già prima dell'affermarsi del concetto di funzione astratta.

Presentiamo ancora come ultimo esempio dell'evoluzione del concetto di funzione la δ, introdotta dapprima nel 1893 dal fisico inglese Oliver Heaviside, ma poi legata al fisico inglese di origine francese Paul Dirac, che vinse il premio Nobel per la fisica nel 1933, insieme all'austriaco Erwin Schrödinger.

Consideriamo una successione di funzioni con grafici costituiti dai lati di un triangolo isoscele ad angolo al vertice sempre più piccolo, che però racchiudono sotto di sé triangoli che hanno sempre la stessa area, che supponiamo valga 1: basta che la base si restringa tanto quanto l'altezza aumenta. Facendo un'estrapolazione (cioè passando al limite) possiamo pensare che ci sia una "funzione" che vale sempre 0 salvo che nel punto 0 in cui vale ∞, e il cui grafico racchiuda sotto di sé una "superficie" di area uguale a 1. La cosa appare piuttosto in contraddizione con l'intuizione: se il grafico di una funzione racchiude sotto di sé una superficie di una data area, tale area non cambia se la funzione viene cambiata di valore in un solo punto; e quindi la superficie dovrebbe avere area 0. Pertanto quello che abbiamo ottenuto non è una funzione nel senso numerico del termine. Il povero Heaviside fu aspramente criticato dai fisici del suo tempo e fu addirittura espulso dalla Royal Society per indegnità teorica. Ma poi l'uso di queste "funzioni generalizzate" si diffuse, specie tra i fisici, e i matematici ne iniziarono una sistemazione teorica. Negli anni Trenta la scuola sovietica, e negli anni Quaranta quella francese svilupparono una teoria che prese il nome di teoria delle *distribuzioni*, che comprendono come caso particolare le funzioni. Una sistemazione definitiva di questa teoria è dovuta al matematico francese Laurent Schwartz, morto nel luglio scorso, e i primi corsi istituzionali universitari in Italia sulla teoria delle distribuzioni furono agli inizi degli anni Sessanta. In particolare l'esempio che abbiamo appena visto, e al quale i fisici e gli ingegneri danno ancora, impropriamente, il nome di funzione, è una distribuzione, detta δ di Dirac.

Notiamo che tramite "funzioni" come questa si dà importanza al valore di una funzione in un punto senza occuparci di quanto valga negli altri. Questa considerazione delle funzioni è quella che regola la nostra tecnica di ogni giorno. Il considerare solo dei valori isolati, presi ad intervalli di tempo costante, si dice *campionamento della funzione*, e i valori così considerati si dicono *valori campionati*. Il suono emesso da un lettore di CD è semplicemente la ricostruzione del segnale musicale o vocale ottenuta elaborando dei valori campionati; al telefono sentiamo una voce che è la ricostruzione di un prelievo di valori campionati fatto circa 8000 volte al secondo. I pixel della TV sono il risultato di un'elaborazione fatta da valori campionati.

Gli insiemi

Abbiamo parlato di funzioni definite su *intervalli della retta.* È ancora presto anche per dire *retta reale* e per associare a questa tre concetti:

- il concetto di insieme *ordinato*, cioè dove è definito il *venire prima* e *venire dopo*, o di *più grande* e *più piccolo*;
- il concetto di insieme *denso*, cioè tale che tra due suoi punti ce ne è sempre almeno un altro; e per poter dare significato alla parola "tra" abbiamo bisogno del'ordinamento;
- il concetto di insieme *continuo*, cioè senza buchi.

I primi due di questi concetti sono sempre stati intuiti e hanno formato la base dei calcoli e di varie teorie, ma stati individuati con una certa precisione verso la seconda metà dell'Ottocento. Anche il semplice concetto di *numero negativo* ha bisogno dell'ordinamento, in quanto *negativo* è un numero minore di 0.

L'Ottocento ripropose i numeri come base della costruzione matematica, e tra questi i numeri considerati erano gli interi, i razionali in quanto quozienti tra numeri interi, e i numeri che erano soluzioni di equazioni formate da polinomi uguagliati a zero, come ad esempio $\sqrt{2}$ e gli altri radicali. Il barone francese Agostino Cauchy costruì la teoria dei limiti, che consentì di passare dall'insieme dei razionali all'insieme dei reali. È sorprendente che mentre i fondamenti dei numeri reali erano ancora così incerti si fosse già sviluppata la teoria delle funzioni di variabile sia reale che complessa. Anche Cauchy, come prima Fourier, ebbe difficoltà accademiche con i cambi di regime in Francia: conservatore di spirito e fedelissimo seguace dei Borboni, andò in esilio volontario per non prestare giuramento al nuovo re uscito dalla rivoluzione del 1830. Durante l'esilio fu anche a Torino; tornato poi in Francia fu reintegrato nell'insegnamento universitario, ma si rifiutò sempre di giurare fedeltà ad un re che egli non considerava legittimo.

In realtà l'insieme dei numeri reali è un modello comodo, ma tutt'altro che utilizzabile. Dei numeri reali si prendono sempre delle approssimazioni tramite razionali, e anzi, tramite razionali finiti, escludendo anche quelli periodici. Né un essere umano né un calcolatore può trattare un numero infinito di cifre. Tutto il modello basato sui limiti, sulla continuità, sulla derivabilità, sulle equazioni differenziali è un bel modello dell'analisi che, a livello macroscopico, descrive abbastanza bene in maniera qualitativa la natura fisica, ma è inutilizzabile nell'analisi numerica, in cui si cercano algoritmi che siano implementabili sul calcolatore e che approssimano la soluzione nel miglior modo possibile. Il modello dei numeri reali è del pari inadatto quando si volesse descrivere la natura della fisica atomica e subatomica, dove intervengono concetti come i quanti e i quark.

Negli anni a cavallo tra l'Ottocento e il Novecento abbiamo un tentativo di mostrare che gli oggetti matematici sono di natura puramente logica: non ci si pone più il problema di cosa siano, bensì a quali leggi obbediscano: la legge che regola il loro comportamento diventa il tratto essenziale. I numeri non sono più oggetti in sé stessi, che obbediscono a certe leggi, ma si identificano con le leggi a cui essi obbediscono.

È bene ricordare che la seconda metà dell'Ottocento è l'epoca della grande matematica tedesca, che si inserisce in una situazione politica e culturale in cui la Germania è all'avanguardia. Citiamo solo alcuni punti fondamentali della storia europea di quegli anni. In Germania nasce il romanticismo, che si diffonderà ovunque, ma che nella musica, letteratura e filosofia tedesca ha tra le sue espressioni migliori. La Prussia diventa una grande potenza europea: Bismarck è cancelliere per quasi trent'anni, dal 1862 al 1890; viene istituito in Germania il suffragio universale; nel 1866 la Prussia è alleata dell'Italia nella terza guerra d'indipendenza; nel 1870 impegna la Francia in una guerra, distogliendola dall'Italia, e consente così ai bersaglieri l'irruzione nella Breccia di Porta Pia e la presa di Roma. Nel 1871 nasce l'impero tedesco, nascono i partiti operai, qualche anno dopo la Germania crea un dominio coloniale in Africa; nel 1882 si forma la Triplice Alleanza tra Germania, Austria e Italia, e Koch scopre il bacillo della tubercolosi. Alla fine del secolo nasce in Germania il primo prototipo di frigorifero basato sull'espansione di un gas. La Germania diventa il centro culturale dell'Europa continentale, e Berlino con la sua università e la sua Accademia mette in secondo piano Parigi, Vienna, Pietroburgo. Questa situazione di eccellenza culturale, tecnica, politica e militare durerà fino alla conclusione della prima guerra mondiale.

In questo rigoglioso splendore culturale nasce in Germania la *teoria degli insiemi*, ideata da Gottlob Frege in un trattato scritto in tedesco verso la fine dell'Ottocento, che adesso va sotto il nome di *teoria ingenua degli insiemi*. Gli insiemi sono definiti da due soli principi: il *principio di estensione* (o di *estensionalità*) e il *principio di comprensione*. Il primo definisce un insieme elencando gli oggetti che vi appartengono: il secondo lo definisce indicando le proprietà che i suoi oggetti devono soddisfare. Un insieme definito così: $\{1,\ 2,\ \text{una capra}\}$ è definito per estensione, in quanto vengono indicati gli oggetti che ne fanno parte; l'insieme definito come *i numeri pari* invece non enumera singolarmente tutti gli elementi che ne fanno parte, ma definisce l'insieme indicando che tutti e soli gli elementi di quell'insieme godono della proprietà di essere numeri interi divisibili per due. In entrambi questi casi, dato un elemento posso dire se esso appartiene all'insieme o no, e quindi l'insieme è conosciuto. I numeri naturali sono gli interi positivi più lo zero, e c'è una loro costruzione che passa attraverso il concetto di insieme: dapprima si considera l'insieme vuoto, $\emptyset$, che è un concetto primitivo; poi si considera l'insieme che ha come elemento l'insieme vuoto $\{\emptyset\}$, e quindi ha un elemento, poi l'insieme che ha come elementi quest'ultimo insieme e l'insieme vuoto $\{\{\emptyset\},\emptyset\}$, e quindi ha due elementi, quindi ancora l'insieme che ha per elementi quest'ultimo insieme, il precedente e l'insieme vuoto, $\{\{\{\emptyset\},\emptyset\},\{\emptyset\},\emptyset\}$ e quindi ha tre elementi, e così via, e si costruiscono così i numeri naturali a partire dagli insiemi.

Sembrerebbe che quindi tutta la matematica si potesse ridurre a numeri, e i numeri agli insiemi, e quindi tutta la matematica alla logica. Ma non è così, perché nel 1902 il filosofo inglese Bertand Russel propose il seguente paradosso, cioè un enunciato che conduce a una contraddizione.

> Dividiamo gli insiemi in due classi: quelli che contengono sé stessi e quelli che non contengono sé stessi. Ad esempio l'insieme di tutti gli insiemi che contengono più di un elemento appartiene a sé stesso, perché certo contiene più di un elemento; l'insieme dei numeri pari non appartiene a sé stesso, perché non è un numero pari.

Domanda: l'insieme I di tutti gli insiemi che non appartengono a sé stessi appartiene o no a sé stesso? Se supponiamo di sì, allora I deve essere un insieme che *non* appartiene a sé stesso, e ciò contraddice la supposizione che appartenesse a sé stesso; se supponiamo di no, allora I deve essere un insieme che *non* appartiene a sé stesso, e allora deve trovarsi in I e quindi appartenere a sé stesso.

Evidentemente ciò mette in crisi il principio di comprensione, e quindi una teoria degli insiemi basata solo su quei due principi conduce a delle contraddizioni e quindi non è una buona teoria. Un modo per salvarla fu di postulare che tutti gli insiemi siano sottoinsiemi di un insieme universale, e quindi non si possa considerare l'insieme di tutti gli insiemi. Negli anni Sessanta il concetto di insieme fu ampliato in quello di *classe* e poi in quello di *categoria*.

Si andò comunque alla ricerca di una costruzione di una teoria degli insiemi che fosse non contraddittoria. Interessante è la teoria degli insiemi proposta dal matematico tedesco Ernst Zermelo nel 1904. Egli partì dal postulare che esistesse almeno un insieme, e poi costruì i successivi insiemi tramite operazioni varie, quali l'unione, il prodotto cartesiano, la potenza. Gli insiemi erano quindi costruiti con operazioni analoghe a quelle che operavano sui numeri: l'unione corrispondeva alla somma, il prodotto cartesiano corrispondeva al prodotto, la potenza corrispondeva all'elevazione a potenza. Questi assiomi tuttavia non bastavano per ottenere la costruibilità di insiemi infiniti, e fu necessario quindi aggiungere un assioma che permettesse la costruzione di insiemi infiniti. Dei sette assiomi su cui si basava la sua teoria, uno, il sesto, fu a lungo contestato dagli altri matematici contemporanei. Esso non corrispondeva ai principi di estensione e di comprensione. Si può esprimere sotto varie forme, e qui lo proponiamo come *assioma della scelta*, nel seguente modo.

> Dato un insieme U costituito da sottoinsiemi S_i non vuoti, è sempre possibile creare un nuovo insieme S (*insieme selettivo*) costituito da elementi ciascuno dei quali è scelto da uno dei sottoinsiemi S_i di U.

Detto in parole semplici: se si hanno (infiniti) sacchi ciascuno con (infiniti) fagioli, è sempre possibile costruire un insieme (infinito) di fagioli, cioè la zuppa di fagioli, prendendo un fagiolo da ogni sacco. Viene così considerata esistente la zuppa, senza che si sappia se un certo fagiolo vi appartiene o no. L'assioma si dice della *scelta* perché di fatto asserisce: per costruire un insieme prendendo un elemento da ogni sottoinsieme *esiste sempre una legge di scelta* anche se non la conosciamo, o non ci preoccupiamo di cercarla. L'ammettere che un insieme esista senza che lo si possa individuare tramite i suoi elementi è un potentissimo strumento per costruire insiemi, che senza questo strumento non potevano essere costruiti.

Ricordo che ancora quando ero studente io, alla fine degli anni Cinquanta, alcuni miei professori ritenevano non valido l'assioma della scelta, ed i testi universitari di allora non contenevano dimostrazioni in cui si costruivano insiemi sfruttando l'assioma della scelta e non dicendo la legge con cui si costruivano: di tutti gli insiemi costruiti si diceva la legge con cui erano formati.

Al sistema di assiomatizzazione della teoria degli insiemi, rivista da Zermelo nel 1908, aggiunse un assioma l'israeliano di origine tedesca Abraham Fraenkel: i valori assunti da una funzione definita su un insieme costituiscono un insieme. E questa assiomatizzazione è quella accettata tuttora sotto il nome di *teoria di Zermelo-Fraenkel*. Arriviamo quindi ad un collegamento molto stretto tra funzioni ed insiemi: le funzioni si basano sul piano cartesiano, questo si basa sui numeri e i numeri sono riconducibili agli insiemi.

Alla teoria degli insiemi si era dedicato già qualche decennio prima Georg Cantor, che può essere definito il "padre della teoria degli insiemi". Era nato nel 1845 a Pietroburgo, da un mercante ebreo tedesco di religione protestante e una madre russa, cattolica. Il clima era freddo e quando il bambino aveva 11 anni il padre portò la famiglia in Germania in cerca di un clima più mite. Cantor rimpianse sempre i suoi anni di Pietroburgo, e non si sentì mai a suo agio in Germania, nonostante egli sia sempre rimasto in Germania dopo di allora e nonostante egli non abbia mai scritto in russo, lingua che pur doveva conoscere. Dopo la maturità Cantor fu mandato al politecnico di Zurigo perché divenisse un buon ingegnere, ma la prematura morte del padre lo fece ritornare; studiò poi a Berlino, dove si laureò nel 1867 con una tesi, scritta ancora in latino, sulle equazioni di secondo grado: *De aequationibus secundi gradus indeterminatis* (Sulle equazioni indeterminate di secondo grado). I suoi studi proseguirono nel campo di quella che ora chiameremmo analisi. Non ebbe una carriera accademica brillante, se paragonata alle aspirazioni: allora la massima aspirazione per un matematico era arrivare alla cattedra presso l'università di Berlino. Cantor rimase sempre invece con il posto di professore a Halle, un'università di terz'ordine, non lontana da Lipsia. Si occupò anche dell'organizzazione dei matematici, fondando ed essendo il primo presidente della società matematica tedesca.

Tra i colleghi Cantor ebbe amici e nemici. Fu grande amico di Dedekind, di una quindicina d'anni più vecchio di lui, che si consigliò con lui per la rappresentazione dei numeri reali tramite le sezioni, come vengono insegnati ancora adesso. Anzi, è recentemente apparsa la traduzione italiana del carteggio tra questi due grandissimi matematici, da cui si desume, oltre che uno spaccato non sempre idilliaco dell'ambiente accademico tedesco, l'evoluzione di numerosi concetti che poi saranno basilari: il concetto di numero, la struttura continua della retta reale, i numeri irrazionali, la classificazione degli insiemi infiniti. Cantor appare, da questo carteggio, una personalità vivace ed entusiasta, romantica, ricca di interessi filosofici; ma traspaiono i segni della sua malattia mentale. Dedekind è più misurato, più freddo. Sullo sfondo di questo epistolario c'è la nascita della matematica moderna, quella che passa dagli oggetti alle strutture, quella che mette in crisi fondamenti millenari e cerca le vie di una costruzione di un nuovo edificio.

Un altro problema che lega insiemi e funzioni è quello della numerosità (o *cardinalità*) degli insiemi. Ad esempio, si dice che *un insieme ha cardinalità 3* se può essere messo in corrispondenza biunivoca con l'insieme modello $\{1, 2, 3\}$. Questa corrispondenza, che intuitivamente non è altro che il contare sulle dita, è una funzione f, e quindi per definire una proprietà degli insiemi abbiamo bisogno del concetto di funzione.

Riguardo al concetto di "contare", esso è molto antico. Il primo segno di numerazione appare fatto su un osso di lupo, databile tra il 20.000 e il 30.000 a. C., trovato a Vestonice, ora nella Repubblica Ceca. Sono evidenti 55 tacche incise artificialmente, con una tacca più profonda ogni cinque. Un altro osso più recente trovato in Dalmazia porta tacche a forma di V ogni cinque e tacche a forma di X ogni 10.

Ovviamente un insieme che ha cardinalità 7 non può avere anche un'altra cardinalità, ad esempio 3; cioè un insieme che ha la cardinalità di un numero intero non può essere messo in corrispondenza biunivoca con un suo sottoinsieme proprio. Quando però ci si trova davanti ad insiemi infiniti si vede subito che ad esempio i numeri interi positivi 1, 2, 3, ... possono essere messi in corrispondenza bunivoca con i soli numeri positivi pari, che sono un loro sottoinsieme proprio: ad ogni intero positivo viene associato il suo doppio, e ad ogni positivo pari viene associata la sua metà. Già Galileo si era accorto che ad ogni intero positivo si poteva associare il suo quadrato, e quindi gli interi positivi sono in corrispondenza biunivoca con i quadrati perfetti, che sono un loro sottoinsieme. Si conviene allora di definire *infinito* ogni insieme che può essere messo in corrispondenza biunivoca con un suo sottoinsieme proprio.

L'insieme dei numeri interi positivi è dunque infinito. Un altro esempio di insieme infinito è la retta, che può essere messa in corrispondenza biunivoca con un suo segmento, ad esempio con l'intervallo aperto $]-1,+1[$.

Del pari una superficie semisferica si può mettere in corrispondenza con un intero piano, il che è alla base di tutta la cartografia.

Aristotele diceva che di tipi di infinito ce n'era uno solo, ed era sempre in potenza e mai in atto; e il Medio Evo non si discostò da questo concetto. Ma il matematico arabo Abul Hassan Thābit, del IX secolo, già disquisiva sul fatto che esistono vari tipi di infinito.

Tutti gli insiemi infiniti possono essere messi in corrispondenza biunivoca tra loro? Si scopre di no: alcuni possono essere messi in corrispondenza biunivoca ad esempio con i numeri naturali positivi 1, 2, 3, ... , che sono infiniti, ma altri no. "Mettere in corrispondenza biunivoca con i naturali positivi" significa semplicemente "mettere in fila", ordinare i numeri dicendo chi è il primo, chi il secondo e così via. Ad esempio, vediamo un modo con cui i numeri razionali positivi possono essere messi in corrispondenza biunivoca con i naturali positivi.

Si scrivono i razionali secondo il quadro seguente:

$$\begin{array}{llll} \frac{1}{1} & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \dots \\ \frac{2}{1} & \frac{2}{2} & \frac{2}{3} & \dots \\ \frac{3}{1} & \frac{3}{2} & \frac{3}{3} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \end{array}$$

e poi si mettono in corrispondenza con i naturali positivi 1, 2, 3, ... , mettendoli in fila per diagonali. Tutti i razionali vengono considerati con questo metodo, e quindi nessuno sfugge ad un suo posto nella fila. Anzi, ce ne sono di multipli, perché compaiono anche tutti quelli che non sono ridotti ai minimi termini, e che possiamo eliminare. Ovviamente non si pretende che la fila sia ordinata in ordine di grandezza. Il tipo di infinito degli interi positivi è lo stesso degli interi relativi (basta mettere in corrispondenza i numeri positivi con i numeri dispari e quelli negativi con i pari), lo stesso dei razionali. È facile vedere che anche i *numeri algebrici*, cioè le soluzioni di un'equazione algebrica a coefficienti interi, si possono mettere in corrispondenza con i naturali positivi; cioè tutte le soluzioni di equazioni del tipo

$$c_0x^n + c_1x^{n-1} + \cdots + c_{n-1}x + c_n = 0$$

per qualsiasi grado n e per qualsiasi scelta (n-pla) di coefficienti interi; infatti non si fa altro che aggiungere ai razionali per ogni equazione a coefficienti interi le sue soluzioni, che sono certo un numero finito. Immediata è la generalizzazione alle equazioni aventi coefficienti razionali; e una successiva generalizzazione ci dice che godono della stessa proprietà anche tutte le soluzioni di tutte le equazioni algebriche aventi come coefficienti dei numeri algebrici, come ad esempio la seguente:

$$3ix^2 - (2 + 5\sqrt{17})x + \sqrt[3]{90} = 0.$$

Alcuni si sorprenderano nel vedere un coefficiente complesso: ma anche certi numeri immaginari sono algebrici: ad esempio $3i$ è soluzione dell'equazione

$$x^2 + 9 = 0.$$

Diremo che tutti questi insiemi hanno la *potenza del numerabile*.

Cantor abbandonò il tentativo di definire le grandezze in sé, ma si limitò a studiarne i comportamenti. Le grandezze diventarono puri simboli, che erano sottoposti a regole di composizione, che per tradizione possiamo chamare somma, prodotto, divisione, passaggio all'opposto: sono questi comportamenti rispetto a certe operazioni che danno un valore matematico ai simboli. Gli enti matematici sono creati per mezzo di convenzioni arbitrarie, come in un gioco di scacchi in cui un pezzo è definito non dalla forma o dal nome bensì dalle mosse che le regole gli consentono, o in un gioco di carte, in cui il valore è definito dalle prese che la carta può fare o subire.

Questa nuova concezione delle entità matematiche, che riduceva tutto a regole di comportamento e toglieva ogni sostanza intrinseca ai numeri non fu condivisa dalla maggioranza dei colleghi di Cantor. In particolare un altro matematico tedesco, Kronecker, insegnante in un'università più presigiosa, criticò pubblicamente in maniera aspra le teorie di Cantor. Ciò fu l'inizio di ricorrenti crisi depressive di Cantor, aggravate dalla morte di un figlio.

Cantor notò poi nel 1874 che i numeri reali non potevano essere messi in corrispondenza biunivoca con i numeri naturali positivi: se si immagina di porre in fila tutti i reali scritti come allineamento decimale, si può sempre costruire tramite un procedimento diagonale un allineamento decimale che non coincide con nessuno dei reali della fila. Basta costruire un allineamento decimale che abbia dal primo numero reale diversa la prima cifra, dal secondo diversa la seconda, dal terzo diversa la terza e così via. Questo nuovo allinenamento non può coincidere con nessuno dei numeri reali messi in fila. Il tipo di infinito dei numeri reali era dunque diverso dalla potenza del numerabile, e poiché i reali contengono strettamente i naturali positivi, si definì che il tipo di infinito dei numeri reali era maggiore della potenza del numerabile, e fu detto *potenza del continuo*. Cantor dimostrò nel 1891 che dato comunque un tipo di infinito, se ne può trovare uno maggiore, e quindi dimostrò che le potenze sono un numero infinito. Alcune corrispondenze biunivoche sono tutt'altro che evidenti: ad esempio si può costruire una curva che occupi un'intera porzione di piano (curva di Peano), e quindi anche il piano ha la potenza del continuo, il che metterà in crisi il concetto di dimensione, che verrà poi messo definitivamente in crisi dalla scoperta dei frattali.

Abbiamo visto che i numeri algebrici hanno la potenza del numerabile, mentre i reali hanno potenza superiore. Ma allora esistono numeri reali che non sono algebrici, cioè non sono soluzioni di nessun polinomio a coefficienti interi uguagliato a 0? E quanti sono? Incredibilmente, ve ne sono moltissimi, solo che non è così facile individuarli, perché di solito tutti i nostri mezzi di manipolazione dei numeri passano per le equazioni algebriche, che producono quindi soltanto numeri algebrici. Solo a metà dell'Ottocento fu dimostrato che la base dei logaritmi naturali, indicata con e, o *numero di Nepero* non era un numero algebrico; e solo nel 1882 il matematico tedesco Ferdinand Lindemann dimostrò che π non è algebrico. Ci sono voluti quindi secoli per trovarne anche solo qualcuno che non fosse algebrico; ma ad esempio è stato dimostrato che e^π non è algebrico, ma non è ancora stato dimostrato se non lo sia anche π^e, oppure πe. I numeri reali che non sono algebrici si dicono *trascendenti*, e tuttora non esiste metodo per decidere se un numero reale è algebrico o trascendente. Peraltro di π stesso non si conoscono tutte le cifre: ne sono state trovate alcuni milioni, ma non esiste un algoritmo numerico che ci consenta di trovare la cifra di qualsiasi posto. Quindi anche quando diciamo che "conosciamo π" intendiamo sempre che ne conosciamo un'approssimazione decimale finita, e non sappiamo quali cifre vengano dopo.

Poiché π interviene anche nella matematica delle scuole medie, vediamo qualche considerazione che lo riguarda. Nel canto I dell'Eneide si racconta di Enea che, fuggito da Troia, approda a Cartagine e incontra la regina Didone, che aveva fondato quella città. La leggenda tramandataci da Virgilio racconta che Didone si innamorò di Enea e, rifiutata da lui, si uccise per amore. Dante la colloca nell'Inferno tra i lussuriosi, condannandone in verità soltanto il fatto che aveva tradito il coniuge già defunto. Ma come Didone aveva fondato Cartagine? Anche lei era approdata fuggitiva in Africa, portando via le ricchezze dalla città fenicia di Tiro dopo che il fratello le aveva ucciso il marito. A lei fu offerto di comperare una terra grande quanto poteva essere compresa in una pelle di bue. Didone prese una pelle di bue e ne ricavò una striscia finissima, e la dispose su una semicirconferenza, con cui cinse un tratto di spiaggia: aveva capito che se si ha un contorno di una data lunghezza, la figura racchiusa che ha area massima è il cerchio. Il rapporto tra le circonferenza e il diametro non era ancora conosciuto con precisione; tuttavia è interessante sapere che "circonferenza" si dice in greco $\pi\epsilon\rho\iota\phi\epsilon\rho\epsilon\iota\alpha$, che significa "cosa portata intorno", da cui il nostro termine "periferia"; e proprio la prima lettera di questa parola è venuta ad indicare il rapporto tra la circonferenza e il suo diametro.

Forse la prima approssimazione di questo rapporto si ha nella Bibbia. Nel primo libro dei *Re* si narra che Salomone mise sette anni per edificare il tempio del Signore, e viene descritta la costruzione, il materiale usato, in larga parte legno, gli arredi, le dimensioni, le porte. Quindi Salomone ebbe bisogno di altri tredici anni per costruire la sua reggia. Anche di questa c'è una minuziosa descrizione: del palazzo, degli arredi, del materiale usato, dell'artista che diresse i lavori. In particolare viene citata la costruzione di un bacino, che era un serbatoio di acqua per lavacri:

Fece un bacino di metallo fuso di dieci cubiti da un orlo all'altro, rotondo; la sua altezza era di cinque cubiti e la sua circonferenza di trenta cubiti.

Troviamo qui per la prima volta il dato che il diametro di un bacino rotondo era di dieci cubiti e la circonferenza di trenta, e quindi l'osservazione che la circonferenza è lunga il triplo del diametro: considerando che eravamo dieci secoli prima di Cristo, l'approssimazione $\pi \approx 3$ può essere considerata già molto buona. Per avere un'idea delle dimensioni, un cubito, che letteralmente voleva dire "gomito", era un'unità di lunghezza lunga quanto appunto un avambraccio, circa 45 cm. Perciò questo bacino aveva un diametro di 4 metri e mezzo e un'altezza di 2,25 m., e conteneva quindi oltre 35.000 litri d'acqua.

Il fatto che π sia un numero trascendente portò anche a dare risposta ad un altro problema studiato per secoli senza soluzione fin quando la scoperta di Lindemann non rivelò che la soluzione era impossibile. Come abbiamo detto, gli strumenti classici della geometria erano la riga e il compasso, e con quelli per secoli furono risolti i problemi geometrici. Uno di questi appassionò i matematici: dato un cerchio di raggio r, trovare, tramite la riga e il compasso, un quadrato di uguale area. Ovviamente, messa la cosa in equazione, essa diviene:

$$\text{Area} = \pi r^2$$

e quindi il lato del quadrato misura $l = \sqrt{\pi} r$. Notevoli sforzi furono condotti per secoli, ma una soluzione non fu mai trovata, e il problema della *quadratura del circolo* divenne sinonimo di problema difficilissimo (prima che si scoprisse che era impossibile risolverlo con quegli strumenti). Dante, alla fine dell'ultimo canto del *Paradiso*, ci presenta quel problema come termine di paragone di cosa appunto che impegna la mente:

Qual è il geometra che tutto s'affige
per misurar lo cerchio, e non ritrova
pensando, quel principio ond'elli indige,
tal era io a quella vista nova

La "vista nova" erano delle figure create nella luce di Dio nel punto più alto del Paradiso, e appunto queste figure restano incomprensibili a Dante, finché non verrà in suo aiuto un fulgore divino.

Riprendiamo le nostre considerazioni su π. La dimostrazione di Lindemann del 1882 della trascendenza di π comporta anche l'impossibilità di quadrare il cerchio, e ancora adesso la frase "cercare di quadrare il cerchio" indica un tentativo di impossibile riuscita. Un problema di uguale importanza, di fatto un'altra faccia dello stesso problema, fu il problema della *rettificazione della circonferenza*, cioè di costruire, tramite riga e compasso, un segmento lungo quanto una circonferenza partendo dal raggio.

Può essere interessante il notare che non da subito la lettera greca π ebbe il significato che ha ora. Dapprima aveva il significato di circonferenza di raggio 1. Con il significato attuale apparve per la prima volta in un trattato latino del 1706, corredato di ben 100 cifre decimali; si affermò più tardi, da che Eulero lo usò nella sua famosa opera *Introductio in analysin infinitorum* (Introduzione all'analisi degli infiniti) pubblicata nel 1748.

Abbiamo fin qui parlato dei numeri algebrici, che abbiamo ben definito ed abbiamo visto avere la potenza del numerabile, cioè si possono mettere in fila, e dei numeri trascendenti, che sono tutti quelli che non sono algebrici. Poiché i reali non si possono mettere in corrispondenza biunivoca con i naturali positivi, la loro cardinalità, o potenza, cioè il tipo di infinito, è maggiore del numerabile, come abbiamo già detto. Si pone adesso il problema: esiste tra la potenza del numerabile e quella del continuo una potenza intermedia? Nel 1883 Cantor congetturò di no; questa congettura prese il nome di *ipotesi del continuo.*

La dimostrazione di questa congettura fu il primo dei 23 problemi che il matematico tedesco David Hilbert propose al secondo congresso dei matematici svoltosi a Parigi nell'anno 1900. Hilbert aveva elencato tutta una serie di problemi importanti che egli proponeva di risolvere nel secolo che stava per iniziare. Alcuni di questi problemi sono stati effettivamente risolti nell'arco del secolo appena trascorso, altri no, altri ancora invece sono stati dichiarati indecidibili. Tra questi ultimi, proprio quello proposto da Hilbert per primo, che si chiede se esista una potenza intermedia tra quella del numerabile e quella del continuo. A lungo Cantor e i matematici successivi si sforzarono di dimostrare che effettivamente la potenza del continuo era il tipo di infinito immediatamente superiore a quello del numerabile. La sterilità di questi tentativi fu uno dei vari motivi che peggiorarono le sue crisi depressive. Durante queste si interessò di altri argomenti, e studiò con impegno la letteratura inglese del periodo elisabettiano; uno degli argomenti a cui dedicò parecchie energie fu il tentativo di dimostrare che le tragedie di Shakespeare erano state in realtà scritte dal filosofo Francesco Bacone, e su questi temi dissertò anche in congressi di matematica, tra lo sbigottimento di tutti i presenti. Per le ricorrenti ricadute della sua malattia mentale Cantor fu esonerato spesso dall'insegnamento; nell'ultimo ricovero in manicomio nel 1917 ebbe anche a soffrire la fame, per la penuria di generi alimentari in Germania a causa della guerra, e lì morì di un attacco cardiaco nei primi giorni del 1918.

L'ipotesi del continuo continuò ad impegnare i matematici ancora per parecchi anni, fin quando nel 1938 il matematico austriaco di nascita ceca Kurt Gödel (poi naturalizzato statunitense) dimostrò che gli insiemi costruibili soddisfano gli assiomi della teoria di Zermelo-Fraenkel e anche l'ipotesi del continuo, e quindi questa non si può dimostrare falsa partendo dagli assiomi di Zermelo-Fraenkel. Nel 1963 lo statunitense Paul Cohen dimostrò che per tutti gli insiemi compatibili con la teoria di Zermelo-Fraenkel vi sono alcuni casi in cui viene negata l'ipotesi del continuo. Pertanto essa è indipendente dalla teoria degli insiemi, in quanto non può essere né dimostrata né confutata basandosi sugli assiomi della teoria.

Gödel inoltre dette la risposta anche al secondo problema di Hilbert: dimostrare la coerenza della teoria dei numeri, reali o interi. Gödel dimostrò nel 1931 che la coerenza di qualsiasi sistema formale non è dimostrabile all'interno del sistema stesso, e quindi la coerenza di ogni teoria che comprenda quella dei numeri interi non si può dimostrare all'interno della teoria stessa. Nessuna teoria che pretenda di fondare la matematica può autogiustificarsi. Nessuna teoria coerente può essere completa, cioè può dimostrare tutte le verità matematiche esprimibili all'interno di sé stessa, e uno di questi asserti indimostrabili è proprio la propria coerenza, per cui il teorema si dice *teorema di incompletezza*.

Nella ricerca del tipo di infinito degli insiemi, Cantor si imbatté in un altro caso bizzarro: un insieme che è "quasi vuoto", eppure ha la potenza del continuo, cioè ha tanti numeri quanti i numeri reali. E questo insieme ha un nuovo interessante aggancio con le funzioni.

Consideriamo l'intervallo $[0,1]$, lo dividiamo in tre parti uguali e ne togliamo il terzo centrale; poi i due terzi laterali rimanenti li dividiamo ancora in tre parti uguali (che quindi sono noni dell'intervallo originario), e ne togliamo le parti centrali, e ripetiamo il procedimento all'infinito. Otteniamo che abbiamo tolto un insieme che ha misura 1, ma quello che resta è un insieme composto di numeri il cui allineamento ternario non contiene la cifra 1, e questi sono tanti quanti i reali. Tale insieme è detto *insieme di Cantor*.

Ad esempio, il numero $1/4$ appartiene a tale insieme. Infatti per ottenere l'espressione scritta in sistema ternario di un numero tra 0 e 1 scritto in forma decimale, se ne prende la parte intera (nel nostro caso 0), la si moltiplica per 3, si scrive la parte intera del risultato e si moltiplica per 3 la parte decimale restante; si scrive la parte intera del risultato e si moltiplica per 3 la parte decimale restante, e così via. Nel caso di $1/4$ abbiamo che la parte intera è 0; vediamo la parte decimale:

$$\begin{aligned} 0,25 \times 3 = 0,75; \text{trascrivo } 0; &\qquad 0 \\ 0,75 \times 3 = 2,25; \text{trascrivo } 2; &\qquad 02 \\ 0,25 \times 3 = 0,75; \text{trascrivo } 0; &\qquad 020 \\ 0,75 \times 3 = 2,25; \text{trascrivo } 2; &\qquad 0202 \end{aligned}$$

e quindi abbiamo che 0,25 si scrive in numerazione ternaria $0,\overline{02}$. Manca la cifra 1, e quindi $1/4$ non appartiene mai ad un terzo centrale degli intervalli che vanno a formarsi, e perciò appartiene all'insieme di Cantor. D'altra parte è evidente che la lunghezza dei sottointervalli che restano diventa sempre più piccola fino allo zero.

Costruiamo adesso la funzione che è costante sui terzi centrali e lineare negli altri tratti, e procediamo all'infinito. Al limite abbiamo una funzione che ha derivata zero in tutto l'intervallo salvo che sull'insieme di Cantor, dove non è derivabile. Per essa non vale il teorema fondamentale del calcolo integrale: infatti, se f è la funzione di Cantor ed f' la sua derivata che esiste quasi dappertutto, e dove esiste è nulla, si ha:

$$1 = f(1) - f(0) \neq \int_0^1 f'(x)\ dx = 0.$$

Ricordiamo, per tranquillizzare tutti, che il teorema fondamentale del calcolo integrale vale se l'integranda esiste *ovunque* sull'intervallo considerato ed è ivi continua, cosa che succede per tutte le funzioni che si incontrano normalmente, ma che appunto per la funzione di Cantor *non* succede.

Concludiamo con un ultimo esempio curioso. Tutte le funzioni che abbiamo visto in concreto oggi erano definite su intervalli della retta reale, ed erano continue, cioè tali che il loro grafico è costituito da una linea continua. Prendiamo ad esempio l'intervallo $[a, b]$: il suo grafico è una linea continua che ha come primo punto $(a, f(a))$ e come ultimo punto $(b, f(b))$; quindi l'immagine di un intervallo è un intervallo. Prendiamo ora una funzione continua dall'intervallo $[0, 1]$ su sé stesso. Esiste di sicuro almeno un punto che viene mandato dalla funzione in sé stesso. Una sua generalizzazione pratica a due dimensioni asserisce che se si vuole rimescolare la ghiaia di un giardino tramite un movimento continuo, esiste almeno un sassolino che resta fermo. Questo è un caso particolare del *teorema del punto fisso* o *teorema di Brouwer*.

Brouwer era un matematico olandese che fondò la teoria dell'*intuizionismo*. Tale teoria, ora poco seguita, richiedeva che ogni dimostrazione o ente matematico avesse un aggancio con qualcosa di concreto, e quindi, ad esempio, rifiutava la validità delle dimostrazioni per assurdo. Ciò rimise in discussione la teoria degli insiemi in quanto frutto di un'astrazione. E ancora adesso, quando in un asserto si dice "esiste", scuole matematiche diverse possono avere atteggiamenti diversi rispetto a quello che vuole dire questo verbo.

I numeri

Come si è cominciato a contare; i primi segni (I, II, III, IIII, V) su un osso di lupo trovato in una località che ora si trova nella Repubblica Ceca.

Supponiamo di conoscere i numeri naturali 1, 2, 3, … ; il loro insieme viene indicato con $\mathbb{N}$.

Assiomi sui numeri naturali (ci sono vari sistemi di assiomi che definiscono i numeri naturali; noi scegliamo quello di Giuseppe Peano):
1) 1 (poi sarà 0) è un numero naturale
2) per ogni numero naturale n esiste un *successore*, detto *sg* n e questo è unico
3) 1 non è successore di nessun numero
4) numeri naturali diversi hanno successori diversi
5) **Principio di induzione** Se $S \subset \mathbb{N}$ verifica:

$$\begin{array}{l} 1 \in S \\ n \in S \Longrightarrow \text{sg}n \in S \end{array}$$

allora $S = \mathbb{N}$.

(N.B. - Alla seconda riga non deve essere verificato che $n \in S$, bensì l'implicazione. Si dà una partenza, si dice che i numeri sono messi in fila, e che la fila è unica, e che non ricomincia un'altra fila.

Definizione di *somma* e di *prodotto* in maniera induttiva:

$$\begin{array}{l} n + 1 = \text{sg } n \\ n + \text{sg } m = \text{sg } (n + m) \\ n \cdot 1 = n \\ n \cdot \text{sg } m = n \cdot m + n \end{array}$$

Valgono tutte le proprietà solite: commutativa, associativa della somma e del prodotto, quella distributiva della somma rispetto al prodotto. Vale anche la proprietà cancellativa della somma; vale anche quella del prodotto, in quanto in questa formulazione non abbiamo lo zero. Se ci fosse lo zero, quel caso va trattato a parte.

Abbiamo le relazioni d'ordine, col $<$, $=$, $>$, $\leq$, $\geq$ e la solita proprietà maggiorativa della somma; abbiamo la solita proprietà di *tricotomia*, che però funziona solo con le relazioni d'ordine totale $>$, $=$, $<$ e *non* con il minore o uguale. Abbiamo la solita proprietà transitiva dell'ordinamento:

$$a < b, \; b < c \Longrightarrow a < c.$$

0.0.1 ESERCIZIO. È vera $3 \leq 4$? È vera $3 < 4$? □

C'è poi il collegamento tra l'ordinamento e le operazioni:

$$a < b \Longrightarrow \begin{cases} a + c < b + c \\ a \cdot c < b \cdot c \text{ ricordiamo che } c \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Principio di induzione: Sia $\mathcal{A}(n)$ un'affermazione che dipende da $n \in \mathbb{N}$. Se
- $\mathcal{A}(1)$ è vera;
- dalla validità di $\mathcal{A}(n)$ si può desumere la validità di $\mathcal{A}(n+1)$;

allora $\mathcal{A}(n)$ è vera per tutti gli $n \in \mathbb{N}$.

0.0.2 ESERCIZIO. Dimostriamo che $10^n \geq 10 \cdot n\ \forall n \in \mathbb{N}$. È vero per $n = 1$; lo supponiamo vero per n e lo dimostriamo per $n+1$.
Devo quindi dimostrare che è $10^{n+1} \geq 10(n+1)$.
Infatti è

$$10^{(n+1)} = 10^n \cdot 10 > 10^n \cdot 2 = 10^n + 10^n \geq \text{(per ipotesi di induzione)} =$$
$$10n + 10n \geq 10n + 10 = 10(n+1)$$

Concludiamo che l'asserto è vero *per ogni n* (qui entra il principio di induzione). □

0.0.3 ESERCIZIO. Esempio del big domino rally e dei soldatini. □

0.0.4 ESERCIZIO. Le due ipotesi che compaiono nel principio di induzione vanno verificate entrambe. Vediamo cosa succede se ne verifico una sola. Prendiamo i numeri interi positivi costituiti da 2 e da tutti i numeri che si ottengono da 2 aggiungeno via via 2; chiamiamo questi numeri a_n. Ora consideriamo il numero 1 e tutti i numeri che si ottengono da 1 aggiungendo via via 2; chiamiamo questi numeri b_n. Chiamiamo *pari* i numeri interi positivi divisibili per 2, cioè tali dividendoli per 2 si ha un quoziente q e resto 0, e diciamo q_n il quoziente che si ottiene dividendo il numero a_n di posto n per 2, e chiamiamo p_n il quoziente che si ottiene dividendo il numero b_n per 2. Notiamo che sia la classe degli a_n sia la classe dei b_n soddisfa al secondo asserto del principio di induzione: infatti, se suppongo che a_n sia pari, risulta $a_n = 2q_n + 0$; pertanto
$a_{n+1} = a_n + 2 = 2q_n + 2 = 2q_{n+1}$
Se suppongo che b_n sia pari risulta ancora $b_{n+1} = b_n + 2 = p_n + 2 = 2p_{n+1}$. Quindi per entrambi queste classi di numeri è verificato che, supposta vera la proprietà di essere pari per l'elemento n-simo, risulta pari l'elemento $(n+1$-simo; ma a_1 è pari, quindi soddisfa anche la prima delle due proprietà, mentre b_1 no. □

0.0.5 DEFINIZIONE. Un numero p si dice *primo* se è divisibile solo per sé stesso e per 1.
(e quindi *non* si può scrivere come prodotto $p = ab$ con $a,\ b \neq p$) □

0.0.6 TEOREMA. *(***di Euclide***) Un numero naturale si può sempre scomporre in fattori primi. Tale scomposizione è unica.*
(niente dim.)

Dal teor. di Euclide segue se un numero primo p è un fattore di un prodotto $a \cdot b$ allora è un fattore di almeno uno tra a e b.
(*niente dim.*)

Esistono infiniti numeri primi.

I numeri reali

Non ci soffermiamo sui numeri reali, le cui proprietà riteniamo note; le operazioni di somma e prodotto, così come quelle di sottrazione e divisione (ricordiamo che non è definita la divisione per 0).
Riteniamo pure note le relazioni di associatività e di distributività delle operazioni.

Una struttura su cui siano definite due operazioni che ammettano una unità ed un inverso per ogni elemento si dice *corpo*. Pertanto l'insieme dei reali con le sue due operazioni di somma e prodotto è un corpo numerico.
Ricordiamo che dati due reali x e y sussiste tra loro una ed una sola tra le seguenti relazioni:

$x < y$
$x = y$ (proprietà di tricotomia)
$x > y$

Ricordiamo che sussiste la proprietà transitiva della disuguaglianza, e la *proprietà archimedea*:

$$\forall\, x, y \in \mathbb{R}, x > 0 \quad \exists\, n \in \mathbb{N} : nx > y.$$

Invece non è vero che esiste una e una sola tra le seguenti:

$$x \leq y, \quad x = y, \quad x \geq y:$$

infatti è $4 = 4$ e anche $4 \leq 4$, e quindi anche $4geq4$.

Un'altra proprietà è quella di densità: dati due numeri reali distinti, ne esiste sempre uno strettamente compreso tra di essi (**proprietà di densità**.

Occupiamoci di una proprietà specifica dei numeri reali, che non hanno tutti gli insiemi numerici, in particolare non ce l'ha $\mathbb{N}$ (**principio di incastro**):

se abbiamo numeri reali a_n e b_n tali che sia

$$a_n \leq a_{n+1}, \qquad b_n \geq b_{n+1}, \qquad a_n \leq b_m \; \forall n, m \in \mathbb{R}$$

allora esiste almeno un punto x di $\mathbb{R}$ tale che sia

$$a_n \leq x \leq b_n \, \forall n \in \mathbb{N}$$

Questo principio si dice anche **principio di completezza** di $\mathbb{R}$.
L'insieme dei reali è un *corpo ordinato archimedeo completo.*

Si dànno per noti il concetto di *valore assoluto* e le sue proprietà.

0.0.7 ESERCIZIO. Se

$$0 \leq a \leq \epsilon \quad \forall \epsilon > 0$$

allora $a = 0$.

Infatti se fosse $a > 0$ prendiamo $\epsilon = \frac{a}{2}$; ma siccome è, con $a > 0$, $\frac{a}{2} < a$, avremmo $a > \epsilon$ contro l'ipotesi. □

Attenzione: esistono insiemi, pur ordinati, per i quali non vale la proprietà dell'esercizio precedente.

Sono dati per noti gli **interi relativi**, così come i **razionali**, che sono i quozienti degli interi relativi quando il denominatore sia diverso da 0. Notiamo che gli interi$\mathbb{Z}$ non godono né della completezza né della densità, e che i razionali $\mathbb{Q}$ non godono della ocmpletezza, pur godendo della densità.

Si dà per noto che questi insieme si denotano con $\mathbb{Z}$ e $\mathbb{Q}$

Dimostriamo che non esiste un numero razionale $\frac{a}{b}$ tale che il suo quadrato sia 2.

Infatti se fosse $\frac{a^2}{b^2} = 2$ avremmo $a^2 = 2b^2$; supponiamo di aver semplificato i fattori comuni, e avremmo che a^2 sarebbe pari, e quindi anche a sarebbe pari; ma allora a^2 sarebbe divisibile per 4, e allora anche b^2 sarebbe pari; ma allora sarebbe pari anche b, il che è contro l'ipotesi che il quoziente a/b fosse ridotto ai minimi termini.

Non dimostriamo che c'è un numero reale il cui quadrato vale 2 (si dimostrerebbe con il principio di incastro).

Con ragionamento analogo si può dimostrare che ogni numero reale positivo n ha almeno una **radice n-sima** nell'insieme dei numeri reali, cioè dato un numero reale $\lambda \geq 0$ ed un numero naturale n allora $\exists \; ! \; \xi$ tale che $\xi^n = \lambda$. (*niente dim.*)
Tale numero si indica con $\xi = \sqrt[n]{\lambda}$ oppure con $\xi = \lambda^{\frac{1}{n}}$.

Vengono date per note le proprietà dei numeri reali, la loro rappresentazione decimale, i numeri decimali periodici, la funzione generatrice di un numero decimale periodico, numeri positivi e negativi, ecc.

Da notare che i numeri decimali finiti si possono tutti scrivere come numeri decimali infiniti di periodo 9: 1= 0,9999 . . . .

Si indica con $(x)_p$ il numero decimale finito ottenuto dall'allineamento decimale che esprime x troncato al decimale p-esimo.

Nomenclatura sugli intervalli *aperti, chiusi, semiaperti (a destra, a sinistra), semirette a destra, a sinistra, chiuse, aperte, di origine a, ecc..*

Un punto di un intervallo si dice *interno* se non coincide con nessun estremo.

Principio di incastro per gli intervalli

0.0.8 TEOREMA. *Se I_k, $k = 1, 2, 3, \dots$ è una successione di intervalli chiusi incastonati (cioè contenenti ciascuno il successivo: $I_k \supset I_{k+1} \; \forall k \in \mathbb{N}$), allora esiste almeno un numero reale x tale che $x \in I_k \; \forall k = 1, 2, \dots,$ cioè $\cap\{I_k : \; k \in \mathbb{N}\} \neq \emptyset$.*

È semplicemente la formulazione per gli intervalli di quello che abbiamo visto per i numeri reali.

Notiamo che se non sono chiusi non è vero: Sia $I_k = \{x : 0 < x < \frac{1}{k}\}$: la loro intersezione è vuota. Inoltre in $\mathbb{Q}$ non è vero, anche quando gli intervalli fossero chiusi.

Definizione di un *maggiorante* m di un insieme A di numeri reali:

$$m \geq a \, \forall a \in A$$

Massimo: a^*se è maggiore di tutti e appartiene ad A.

Di maggioranti possono essercene molti; di massimi, se ce ne sono, ce n'è uno solo.

Analogamente per il minimo. $\frac{1}{n}$ ha massimo 1 ma non ha minimo.

Insieme *superiormente limitato, inferiormente limitato.*

Insieme *limitato*: se è limitato l'insieme dei moduli:

$$|a| \leq m \, \forall \; a \in A$$

0.0.9 Esercizio. Trovare il massimo, minimo, i maggioranti e minoranti dell'insieme costituito dai punto 0 e 1, dell'intervallo pieno, di due intervalli chiusi, semichiusi, aperti. □

0.0.10 Teorema. *Sia $A \subset \mathbb{R}$ un insieme superiormente limitato e non vuoto. Allora l'insieme M di tutti i maggioranti ha un elemento minimo s, cioè $\exists s \in M$ tale che*

$$s \leq m \quad \forall m \in M$$

Ciò significa che $\exists\ s \in \mathbb{R}$ tale che

$$\begin{array}{ll} s1) & s \geq a\ \forall a \in A \\ s2) & \text{se } m \geq a \quad \forall a \in A \text{ allora } m \geq s. \end{array}$$

0.0.11 Definizione. Il minimo dei maggioranti di un insieme A di numeri reali si dice **estremo superiore** di A e si indica con

$$s = \sup A$$

. □

Nella dimostrazione dell'esistenza (che saltiamo) si vede che l'estremo superiore sup A di un insieme A gode delle seguenti due proprietà:

$$\begin{array}{l} a \leq \sup A \quad \forall a \in A \\ \text{se } a \leq m \quad \forall a \in A \quad \text{ allora } \sup A \leq m. \end{array}$$

Da notare che se fosse verificata una disuguaglianza più forte, come

$$\text{se } a \leq m \quad \forall a \in A$$

non per questo risulterebbe anche la disugugaglianza stretta sup$A < m$; la disuguaglianza resterebbe sempre con il segno di *leq*.

Quando un insieme A non è superiormente limitato si converrà di dire che sup $A = +\infty$.

Analogamente si dà la definizione di **minorante** di un insieme A di numeri reali; sarà dimostrabile l'esistenza del massimo dei minoranti, e questo si dirà inf A.

0.0.12 Esercizio. Determinare estremo superiore ed inferiore dell'insieme $\{n - \frac{1}{n}\} : \quad n \in \mathbb{N}$. □

0.0.13 Esercizio. Se è sup $A =$ inf A, come è fatto A? □

0.0.14 Esercizio. Due insiemi di numeri reali hanno lo stesso inf e lo stesso sup; sono uguali? □

0.0.15 Esercizio. Due intervalli sulla retta hanno lo stesso inf e lo stesso sup; sono uguali? □

0.0.16 Esercizio. L'insieme dei punti $\{n\} \cup \{\frac{1}{n}\}$ è limitato? Ha estremo inferiore, superiore, massimo minimo? □

0.0.17 Esercizio. L'insieme dei punti $\{n - \frac{1}{n}\}$ è limitato? Ha estremo inferiore, superiore, massimo minimo? □

0.0.18 Esercizio. Calcoliamo la somma $\sum_{k=1}^{n} k$.
Risulta $(k+1)^2 = k^2 + 2k + 1$. Se scriviamo questa uguaglianza per tutti i singoli k da 1 fino ad n e poi sommiamo membro a membro abbiamo:

$$\sum_{k=1}^{n}(k+1)^2 = \sum_{k=1}^{n} k^2 + 2\sum_{k=1}^{n} k + n.$$

Adesso facciamo slittare gli indici: risulta

$$\sum_{k=1}^{n}(k+1)^2 = \sum_{k=2}^{n+1} k^2 = (\text{isolando l'ultimo termine}) = \sum_{k=2}^{n} k^2 + (n+1)^2$$

Se prendiamo i due primi membri delle due ultime formule essi sono uguali; uguagliando i secondi membri, notiamo che hanno entrambi la sommatoria dei k^2, ,a uno ha un termine in più che vale 1. che quindi viene eliminata e resta

$$(n+1)^2 = 1 + 2\sum_{k=1}^{n} k + n$$

da cui si deduce

$$[\sum_{k=1}^{n} k = \frac{1}{2}[(n+1)^2 - n - 1] = \frac{1}{2}(n^2 + 2n + 1 - n - 1) = \frac{n(n+1)}{2}$$

e quindi

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$$

cosa che peraltro era riconoscibile subito: si sommano il primo e l'ultimo addendo e se ne fa la media, e questa la si moltiplica per n che è il numero degli addendi. □

0.0.19 Esercizio. Questa volta proviamo a fare la somma non dei numeri bensí delle potenze dello stesso numero: $\sum_1^n x^k$.
Moltiplico tutto per $1 - x$ ed ottengo:

$$(1-x)\sum_{1}^{n} x^k = \sum_{1}^{n} x^k - x\sum_{1}^{n} x^k = \tag{0.0.1}$$
$$(x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n) - (x^2 + x^3 + x^4 + \cdots + x^{n+1}) = x - x^{n+1}$$

da cui:

$$\sum_{1}^{n} x^k = \begin{cases} \frac{x - x^{n+1}}{1-x} \text{ se } x \neq 1 \\ n \text{ se } x = 1 \end{cases}$$

□

0.0.20 Esercizio. Proviamo a calcolare la formula appena trovata utilizzando invece il principio di induzione.
Dobbiamo verificare che per $n = 1$ essa è vera. Infatti la sommatoria a sinistra si compone di un termine solo, che vale x, e l'espressione a sinistra vale

$$\frac{x - x^2}{1 - x}$$

che si semplifica e resta x, c.v.d.
Adesso dimostriamo che, supponendo la formula vera per n, essa risulta valida per $n + 1$. Infatti è:

$$\sum_{k=1}^{n+1} x^k = \sum_{k=1}^{n} x^k + x^{n+1}$$

Ma per l'ipotesi di induzione la prima sommatoria ci è nota, e quindi risulta:

$$\sum_{k=1}^{n+1} x^k = \frac{x - x^{n+1}}{1 - x} + x^{n+1} = x - x^{n+2}$$

□

0.0.21 Esercizio. Dato un insieme A si indica con $\mathcal{P}(A)$ l'insieme costituito da tutti i suoi sottoinsiemi. Detto di passaggio, notiamo che l'insieme vuoto $\emptyset$ non ha elementi, ma l'insieme dei suoi sottoinsiemi è costituito da un insieme che ha un elemento che è l'insieme vuoto, e che quindi si indica così: $\{\emptyset\}$.[1] Sia adesso A un insieme costituito da n elementi, con n generico, che possiamo indicare così:

$$A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$$

Vogliamo verificare che il numero di elementi che compone $\mathcal{P}(A)$ è 2^n. Dimostriamolo per induzione. Dobbiamo verificare il *punto base* e poi il *passo induttivo*. Il punto base lo abbiamo già verificato: se A è l'insieme vuoto, cioè con 0 elementi, $\mathcal{P}(A)$ ha $1 = 2^0$ elementi.
Verifichiamo adesso il *passo induttivo*. Dobbiamo verificare che, supponendo vero che quando A ha n elementi $\mathcal{P}(A)$ ha 2^n elementi, allora quando A ha $n+1$ elementi $\mathcal{P}(A)$ ha 2^{n+1} elementi.
Infatti scomponiamo A in un insieme A_1 che ha n elementi e lo uniamo ad un insieme A_2 composto di un elemento solo, e possiamo scrivere così:

$$A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\} \cup \{a_{n+1}\}\}$$

L'insieme delle parti di A è costituito dalle parti di A_1 (compresa la sua parte vuota) a cui si aggiungono le parti che si ottengono da queste aggiungendo a ciascuna di queste a_{n+1}. Le prime sono, per ipotesi del passo induttivo, in numero di 2^n e le seconde sono ancora in numero di 2^n; pertanto è:

$$\mathcal{P}(A) = 2^n + 2^n = 2 \cdot 2^n = 2^{n+1}$$

risulta quindi che è $\mathcal{P}(A) = 2^n$ per tutti gli $n \in \mathbb{N}$, c.v.d. □

[1] Non si confondano $\emptyset$ e $\{\emptyset\}$!